„Jako slunce zastiňuje hvězdy svým jasem,
tak i vzdělaný člověk může zastínit slávu
druhých lidí ze společnosti, bude-li předkládat
matematické úlohy, a dosáhne ještě víc,
bude-li je řešit.“
Brahmagupta

1. Opakování: úpravy algebraických výrazů, rovnice a nerovnice

1. Upravte daný výraz a určete podmínky, za kterých má daný výraz smysl:

   a) $\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{x^2}{y}+x+y\right):\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)$ $[x\neq 0, y\neq 0,\ x\neq \pm y;\ \frac{x^2}{x-y}]$

   b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+2}\cdot\left(\frac{2}{25}\right)^{1-2x}\cdot 10^{-2x}$ $[x\in\mathbb{R};\ 2^5\cdot 5^{-4}]$

   c) $\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{8^3}}}\cdot\sqrt{\frac{8}{\sqrt[3]{2}}}$. $[\sqrt[6]{2}]$

2. Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice a nerovnice:

   a) $|x+1|<0,01$ $[x\in(-1,01;-0,99)]$

   b) $|2x-1|<|x-1|$ $[x\in(0;\frac{2}{3})]$

   c) $2^{|x-3|}=16$ $[x\in\{-1;7\}]$

   d) $\frac{|x|+2}{|x|-2}=5$ $[x\in\{\pm 3\}]$

   e) $|x^2+3x+2|=2x+4$ $[x\in\{-2;1\}]$

   f) $|x|+|2-x|=2$ $[x\in\langle 0;2\rangle]$

   g) $\sin x=\frac{1}{2}$ $[x\in\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5}{6}\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}]$

   h) $3+|2x-1|<0$ $[\emptyset]$

   i) $\frac{x-1}{x+2}\geq 0$ $[x\in(-\infty;-2)\bigcup\langle 1;+\infty)]$

   j) $\sqrt{5-x}\leq 2$ $[x\in\langle 1;5\rangle]$

   k) $2+\frac{1}{\ln x}=0$ $[x=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$

3. Řešte v $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$ následující soustavy rovnic:

   a) $$\begin{array}{rcrcl} 9x & + & 12y & = & 7 \\ 3x & + & 4y & = & 1 \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{rcrcl} \frac{2}{x} & + & \frac{3}{y} & = & 2 \\ -\frac{4}{x} & + & \frac{1}{y} & = & 3 \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ x & - & 6y & - & z & = & -9 \end{array}$$

4. Určete definiční obor funkce:

   a) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{|x-4|-2}}$ $[x\in(-\infty;2)\bigcup(6;+\infty)]$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$ $\qquad [x\in(-1;0\rangle\bigcup(1;+\infty)]$

c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$ $\qquad [x\in(-\infty;-3)\bigcup(-2;+\infty)]$

d) $f(x)=\ln(12-4x-x^2)$ $\qquad [x\in(-6;2)]$

2. Komplexní čísla

1. Určete reálnou a imaginární část komplexních čísel:

   a) $z=\dfrac{1+i}{1-2i}+\dfrac{i}{1+i}$ $\qquad [z=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i]$

   b) $z=\dfrac{2+i}{3-i}+(i-2)(4-i)$ $\qquad [z=-\frac{13}{2}+\frac{13}{2}i]$

   c) $z=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$ $\qquad [z=1-i]$

2. Vypočítejte:

   a) $\left|\dfrac{1-3i}{2i+5}\right|=$ $\qquad [\sqrt{\frac{10}{29}}]$

   b) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{25}$ $\qquad [-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i]$

3. Vypočítejte $(1+i)^{-6}$ pomocí a) Moivreovy věty b) binomické věty. $\qquad [\frac{1}{8}i]$

4. Převeďte komplexní číslo na goniometrický tvar:

   a) $z=1+\sqrt{3}i.$ $\qquad [2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})]$

   b) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad [\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi]$

   c) $z=\dfrac{i-3}{2+i}.$ $\qquad [\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)]$

5. Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $z^3=1+i$.

6. Vypočítejte reálný parametr c tak, aby rovnice $x^2-6x+c=0$ měla komplexní kořen, jehož imaginární část je rovna -2.
   Určete oba kořeny rovnice. $\qquad [c=13;\ x_1=3-2i,\ x_2=3+2i]$

7. Určete všechna reálná čísla b tak, aby pro komplexní čísla $z=3-bi$ platilo $|z|>\sqrt{10}$. Tato čísla znázorněte v Gaussově rovině.

8. Která komplexní čísla vyhovují rovnici

   a) $z.\bar{z}+z=6+2i$ $\qquad [\{1+2i,-2+2i\}]$

   b) $z^4=|z|$ $\qquad [\{0,\pm1,\pm i\}]$

   c) $z^2-4z+6=0$ $\qquad [\{2\pm\sqrt{2}i\}]$

   d) $z^2-iz+6=0\,?$ $\qquad [\{3i,-2i\}]$

3. Důkazy

1. Dokažte, že číslo $\sqrt[n]{2}$ je iracionální pro každé přirozené $n \geq 2$.
2. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
3. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
4. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je $n^3 - n$ dělitelné šesti.
5. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je $n^7 - n$ dělitelné sedmi.
6. Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo $n^4 + 3n^2$ dělitelné čtyřmi.
7. Dokažte pro všechna přirozená n: jestliže číslo $n^2 + 2$ není dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné číslo n.
8. Dokažte binomickou větu:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \,.$$
9. Dokažte, že číslo 21 dělí pro každé přirozené n číslo $4^{n+1} + 5^{2n-1}$.
10. Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

    a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

    b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

    c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

    d) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, pro $n \geq 2$

    e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

    f) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

    g) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

11. Dokažte, že pro $\varphi \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí:
$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \,.$$

12. Matematickou indukcí dokažte vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem q. Rozlište případ $q = 1$ a $q \neq 1$.

13. Uvažujte aritmetickou posloupnost $a_{n+1} = a_n + d$, $d \in \mathbb{R}$. Matematickou indukcí dokažte vzorec pro n-tý člen této posloupnosti.

14. Dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4Kč vyjádřenou v celých korunách lze sestavit jen užitím dvoukorun a pětikorun.

15. Fibonacciho posloupnost $\{F_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ je definována rekurentně takto:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dokažte, že platí identita $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{i+2} - 1$.

16. Je dáno n navzájem různoběžných přímek v rovině, z nichž žádné tři neprochází jedním bodem. Na kolik částí rozdělí všechny tyto přímky rovinu? Své tvrzení řádně dokažte!

4. Funkce a jejich vlastnosti

1. Načrtněte grafy následujících funkcí:

a) $f_1(x) : y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) $f_2(x) : y = |\ln|x||$

c) $f_3(x) : y = (x-3)^2 + 1$

d) $f_4(x) : y = \dfrac{x+2}{|x+2|}$

e) $f_5(x) : y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

f) $f_6(x) : y = 2\cos 2x$

g) $f_7(x) : y = \dfrac{1}{x+2} + 1$

h) $f_8(x) : y = \operatorname{tg}(x + \pi)$

i) $f_9(x) : y = (x+2)^3 - 4$

j) $f_{10}(x) : y = \log_2(x+1) - 3$

k) $f_{11}(x) : y = |\operatorname{cotg} x|$

l) $f_{12}(x) : y = \operatorname{tg}|x|$

m) $f_{13}(x) : y = \dfrac{2\cos^2 x}{\cos x - |\cos x|}$

n) $f_{14}(x) : y = \sqrt{\dfrac{\operatorname{cotg} x}{|\operatorname{cotg} x|}}$

o) $f_{15}(x) : y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$

p) $f_{16}(x) : y = \sin x + \sin|x|$

q) $f_{17}(x) : y = \ln\sin x$

r) $f_{18}(x) : y = \ln(\ln\sin x)$

2. Rozhodněte, které vlastnosti funkce má a které nemá:
je/ není periodická/ sudá/ lichá/ omezená.

   a) $f(x) : y = \frac{1}{2}x - \cos x$
   b) $f(x) : y = \ln(x^2 + 5)$
   c) $f(x) : y = \ln(|x| + 5)$
   d) $f(x) : y = x + 2x^3$.

3. Rozhodněte, které vlastnosti funkce má a které nemá:
je/ není rostoucí/ klesající/ nerostoucí/ neklesající.

   a) $y = \mathrm{e}^{2x+1}$
   b) $y = \ln(1 - \sqrt{x})$
   c) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 3,\ x \in (2; \infty)$.

4. Rozhodněte, které funkce jsou na svém definičním oboru prosté:

   a) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 1}$ [ano, $x \in \mathbb{R}$]
   b) $f(x) = 1 + \log \sqrt{x}$ [ano, $x > 0$]
   c) $f(x) = 1 + |x|$. [ne, $x \in \mathbb{R}$]

5. K následujícím funkcím (na příslušném definičním oboru) stanovte inverzní funkci:

   a) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,,\ x \in \mathbb{R}\,;$ [$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1);\ x \in (1; \infty)$]
   b) $f(x) = 1 + \log \sqrt{x}\,,\ x > 0\,;$ [$f^{-1}(x) = 10^{2x-2};\ x \in \mathbb{R}$]
   c) $f(x) = 1 + |x|\,,\ x \leq 0\,;$ [$f^{-1}(x) = 1 - x;\ x \geq 1$]
   d) $f(x) = x^2 + 1\,,\ x \geq 0\,;$ [$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1};\ x \geq 1$]
   e) $f(x) = \ln(2 - \sqrt{x})\,,\ x \in D(f)\,;$ [$f^{-1}(x) = (2 - \mathrm{e}^x)^2;\ x \in (-\infty; \ln 2\rangle$]
   f) $f(x) = 2\ln(1 - 5x)\,,\ x \in D(f)\,;$ [$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}});\ x \in \mathbb{R}$]

6. Rozhodněte, které funkce jsou na svém definičním oboru periodické:

   a) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$
   b) $f(x) = 3\cos 4x$
   c) $f(x) = 5 + 5\sin\left(\frac{x}{2} - 2\right)$
   d) $f(x) = \cos \mathrm{e}^x$. [a) b) c) periodické]

7. U periodických funkcí z předchozího příkladu tohoto odstavce určete jejich primitivní (nejmenší kladnou) periodu. [a) $p = 2\pi$ b) $p = \frac{\pi}{2}$ c) $p = 4\pi$]

„Látce rozumíte bezpečně teprve tehdy,
když jste schopný ji vysvětlit vlastní babičce.“
A. Einstein

5. Cyklometrické funkce

1. Určete následující hodnoty:

   a) $\arcsin 60°$, $\arcsin 0$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$
   b) $\arccos \pi$, $\arccos 1$, $\arccos \frac{1}{2}$
   c) $\operatorname{arctg} 0$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$
   d) $\operatorname{arccotg}(-1)$, $\operatorname{arccotg} 0$, $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$.

2. Nakreslete grafy funkcí:

   a) $\arcsin(\sin x)$
   b) $\cos(\arccos x)$.

3. Určete definiční obor a obor hodnot funkcí:

   a) $f(x): y = 2\arccos(\frac{x}{2} - 1)$ $[D(f) = \langle 0; 4\rangle, \quad H(f) = \langle 0; 2\pi\rangle]$
   b) $f(x): y = 2\arccos\sqrt{1-x^2} + 5$ $[D(f) = \langle -1; 1\rangle, \quad H(f) = \langle 5; 5+\pi\rangle]$
   c) $f(x): y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $[D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\setminus\{0\}]$
   d) $f(x): y = \ln(\operatorname{arctg}(1-2x))$ $[D(f) = (-\infty; \frac{1}{2}), \quad H(f) = (-\infty; \ln\frac{\pi}{2})]$
   e) $f(x): y = \arcsin(\ln x)$ $[D(f) = \langle \frac{1}{e}; e\rangle, \quad H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle]$
   f) $f(x): y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$. $[D(f) = \langle 0; 1), \quad H(f) = \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})]$

4. K daným funkcím najděte funkci inverzní:

   a) $f(x): y = 2\arccos(\frac{x}{2} - 1)$ $[f^{-1}(x) = 2\cos\frac{x}{2} + 2, \quad D(f^{-1}) = \langle 0; 2\pi\rangle]$
   b) $f(x): y = 2\arccos\sqrt{1-x^2} + 5$ [$f^{-1}(x)$ neexistuje, $f(x)$ není prostá]
   c) $f(x): y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $[f^{-1}(x) = \operatorname{cotg} x, \quad D(f^{-1}) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\setminus\{0\}]$
   d) $f(x): y = \ln(\operatorname{arctg}(1-2x))$ $[f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} \mathrm{e}^x), \quad D(f^{-1}) = (-\infty; \ln\frac{\pi}{2})]$
   e) $f(x): y = \arcsin(\ln x)$ $[f^{-1}(x) = \mathrm{e}^{\sin x}, \quad D(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle]$
   f) $f(x): y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$. $[f^{-1}(x) = (1 - \operatorname{cotg}^2 x)^2, \quad D(f^{-1}) = \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})]$

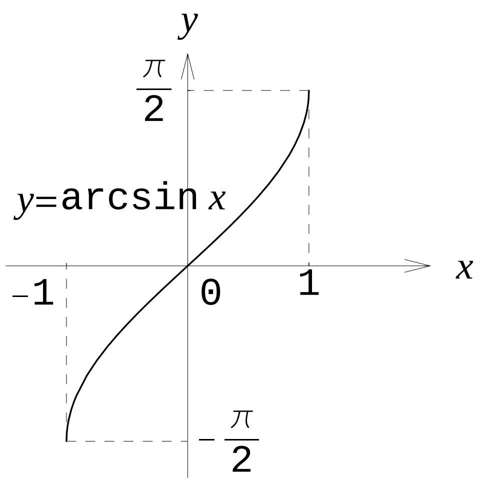
5. Ověřte platnost následujících identit:

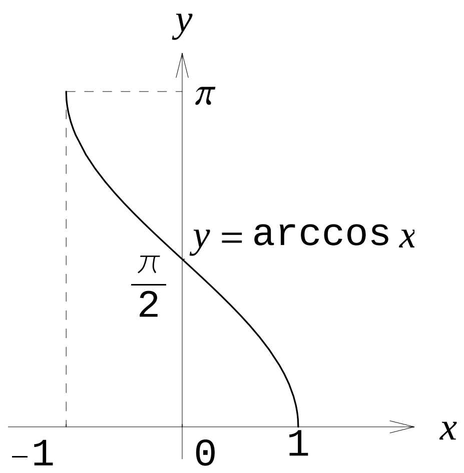
a) $\forall x \in \langle 0; 1\rangle \qquad \arcsin \sqrt{1-x^2} = \arccos x$

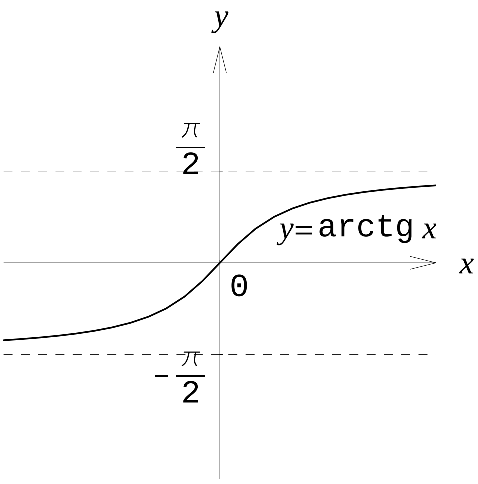
b) $\forall x \in \langle -1; 1\rangle \qquad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

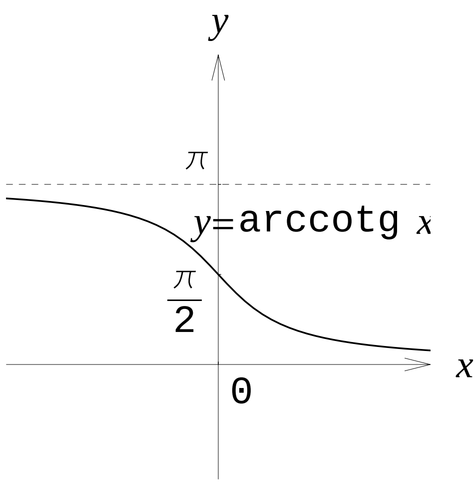
c) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x$

d) $\forall x \in (-1; 1) \qquad \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\,.$









„Látce rozumíte bezpečně teprve tehdy,
když jste schopný ji vysvětlit vlastní babičce.“
A. Einstein

1. Supremum a infimum

1. Zjistěte, zda množina M je omezená (resp. omezená shora nebo zdola) a určete její infimum a supremum. Zjistěte, zda existuje maximum a minimum dané množiny:

   a) $M = \{4\}$
   b) $M = \{-3, 9, \sqrt{3}, \pi, -\frac{11}{3}, \ln 2\}$
   c) $M = \langle -5, 5\pi \rangle$
   d) $M = (-5, 5\pi)$
   e) $M = \langle -5, 5\pi)$
   f) $M = \mathbb{N}$
   g) $M = (-\infty; \pi)$
   h) $M = \mathbb{Q}$
   i) $M = \mathbb{R}$
   j) $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
   k) $M = \{\frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}\}$
   l) $M = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots; n \in \mathbb{N}\}$
   m) $M = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$
   n) $M = \{n^2 - m^2; m \in \mathbb{N}, n > m\}$

2. Vyšetřete existenci suprema a infima množiny A:

   a) $A = \{2 \sin x, x \in \mathbb{R}\}$
   b) $A = \{\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}\}$
   c) $A = \{\operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}\}$
   d) $A = \{\arccos x, x \in \langle -1; 1 \rangle\}$
   e) $A = \{\arccos x, x \in (-1; 1)\}$
   f) $A = \{\arccos x, x \in \langle 0; 1)\}$

3. Vyšetřete existenci suprema a infima množiny M a podle definice dokažte, že jde skutečně o infimum/ supremum:

   a) $M = \{\frac{n}{n+2}, n \in \mathbb{N}\}$ $[\sup M = 1, \quad \inf M = \frac{1}{3}]$
   b) $M = \{\frac{n+3}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ $[\sup M = 2, \quad \inf M = 1]$
   c) $M = \{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. $[\sup M = \frac{1}{2}, \quad \inf M = -1]$

4. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum.

5. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

2. Limita posloupnosti

1. Dokažte podle definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

2. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \\ \text{neexistuje} & a \leq (-1)\,. \end{cases}$$

3. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{100n}{n^3+1}$. [Limita posl. ve vlastním bodě nemá smysl!]

4. Ověřte, že

$$\lim_{n\to\infty} n^m = 0 \qquad \text{pro } m \in \mathbb{Q}^-$$
$$\lim_{n\to\infty} n^m = +\infty \qquad \text{pro } m \in \mathbb{Q}^+.$$

5. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n}{\frac{1}{1000}n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}\cdot\sin(n!)}{n+1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

[a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) $\frac{1}{3}$]

6. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3-n^2+2n-1)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^4-2n^3-n^5+4)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n}{2n^3+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^2+1}\right)^2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{\sqrt{5}n-2}$

[a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $\frac{1}{2}$ d) 0 e) 4 f) $+\infty$]

7. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^2-7n+7}$

[a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $+\infty$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$ f) $+\infty$]

8. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n!}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 4^n}{5^n}$

9. Dokažte pomocí věty o limitě vybrané posloupnosti, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ neexistuje.

10. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+a)}-n)$, $a \in \mathbb{R}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

[a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{a}{2}$ e) 0 f) neexistuje]

11. Důležité příklady limit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad a > 1, k \in \mathbb{N};$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0 \qquad a > 0, k \in \mathbb{N};$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad a > 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

12. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. [návod: aplikace věty "o dvou policajtech"]

13. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

14. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$, $A, B, C > 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(n^3-1000n^2+1)}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n + n^3 + \frac{1}{n} + \mathrm{e}^n + 5^n}{\log n + n^4 + 5^n + n^3 4^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

15. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n^2+1)\cdots(n^m+1)}{[(mn)^m+1]^{\frac{m+1}{2}}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin(\ln(n+1)) - \sin(\ln n))$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2+\mathrm{e}^{3n})}{\ln(3+\mathrm{e}^{3n})}$

[a) $m^{-\frac{m}{2}(m+1)}$ b) 0 c) 0 d) 1]

16. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})}{\ln(1+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n})}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+3n-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3\cos(2n)}{2n^3+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2+1)\sin n}{3n^3}$

17. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{8n+7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3}-\sin n-\cos n)\dfrac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)\sqrt{3n^3+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\lfloor kx\rfloor}{n^2}, \quad x\in\mathbb{R}$

18. Najděte limitu posloupnosti zadané rekurentně:

a) $a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\dots,a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

b) $a_1>0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$

c) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$.

19. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_0\left(1+0,85\cdot\dfrac{p}{100}\cdot\dfrac{1}{n}\right)^{kn}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad a_0>0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{365+\left|\cos\dfrac{2NR}{4}\right|^n-\left|\cos\dfrac{2NR}{100}\right|^n+\left|\cos\dfrac{2NR}{400}\right|^n\right\}, \quad R=90, \quad N\geq 1582.$

„Bez příkladů, pouček a cvičení
se ničemu neučí, leda nesprávně.“
Jan Ámos Komenský

1. Limita funkce

V následujících úlohách vypočtěte limity:

1. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x^2-2x}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$.

[a) $\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\frac{12}{5}$ d) $-\frac{3}{8}$]

2. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$

[a) $\frac{49}{24}$ b) $\frac{n}{2}(n+1)$]

3. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

[a) 6 b), f) $\frac{n}{2}(n+1)$ c) $\frac{mn}{2}(n-m)$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ e) $\frac{m}{n}$ g) $\frac{1}{2}(m-n)$ h) $\frac{1}{4}$]

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3x^4-6x^2+5}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^3}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ f) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to a_+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1-x)}{x}$

[a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ b), 1 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $-\frac{1}{4}$ f) 1 g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{n}$ i) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ j) 0]

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x^\alpha}$

$$\begin{bmatrix} \alpha = 1 & \frac{1}{m}-\frac{1}{n} \\ \alpha < 1 & 0 \\ \alpha > 1 & m > n \ldots -\infty, m < n \ldots +\infty \end{bmatrix}$$

6. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

[a) $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$ b) $\frac{3}{2}$]

7. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$

[a) neexistuje b) $-\frac{1}{\pi}$ c) 1 d) $1+\operatorname{tg}^2 a$]

8. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin nx}{\sin mx}$ d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin a}}{x-a}$

[a) neexistuje b) 0 c) $\pm\frac{n}{m}$ (v závislosti na paritě n, m) d) $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$]

9. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

[a) $-\frac{1}{12}$ b) $\sqrt{2}$ c) 14 d) 0]

10. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\log_a x-\log_x a}{x-a}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\log_x 2$

[a) 0 b) $\frac{a^2}{b^2}$ c) $\frac{2}{a\log a}$ d) $-\log 2$]

11. a) $\lim\limits_{x\to 1_+} \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}(\ln x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x^2$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{-x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \ln \dfrac{1}{(1-x)^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{x+1}{\operatorname{tg} x}$

[a) $+\infty$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) 1 d) $\frac{\pi}{2}$ e) 1 f) 0 g) $+\infty$ h) $-\infty$]

12. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}(\mathrm{e}^x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}(\mathrm{e}^x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1}{\operatorname{arctg}(\sin x)}$ d) $\lim\limits_{x\to 1_+} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

[a) $\frac{\pi}{2}$ b) 0 c) $+\infty$ d) $\frac{\pi}{2}$]

13. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$

[a) e^{-1} b) 1 c) 1 d) e^{2a}]

14. a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}-\frac{\pi}{4}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\ln(1+x)}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

[a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) -1]

15. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log^\alpha x}{x^\beta},\quad \alpha,\beta>0$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}},\quad \alpha,\beta>0$

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \log^\beta x,\quad \alpha,\beta>0$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{1+\ln x}}{\ln(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-3x})}$

[a) 0 b) 0 c) 0 d) 1 e) $\frac{\mathrm{e}}{3}$]

16. a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\ln(1-x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x\cos x}+\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arccotg}(\mathrm{e}^{-x}\sin x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\ln\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}}\right)$

[a) $\frac{15}{2}$ b) neexistuje c) 4 d) 2 e) $\frac{\pi}{2}$ f) 0]

17. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1-2x}{5-2x}\right)^x$ d) $\lim\limits_{x\to 0_+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

[a) 0 b) e^{-1} c) e^2 d) e]

18. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}, \quad a>0$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + x}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\log x - \log 10}{\log \frac{10}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

[a) $\frac{1}{a}$ b) $+\infty$ c) -1 d) neexistuje]

19. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\ln \dfrac{x+4}{x+3}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$ d) $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{9x^2+(2x-1)} - \sqrt{9x^2-(2x-1)}\right)$

[a) 0 b) $-\infty$ c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) 1 f) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ g) $-\frac{2}{3}$]

20. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{9x+2x^2} - x\sqrt{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{\arcsin 2^x}{\pi + \operatorname{arccotg} x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

[a) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{21}$ d) 3]

21. a) $\lim\limits_{x\to 0} x \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{1-\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

[a) 2 b) 4 c) -3]

„Matematika nám neslúži len na poznávanie prírody, ale je tiež mohutným nástrojom na jej ovládnutie.“
Štefan Schwarz

1. Derivace funkce jedné reálné proměnné

1. Vypočtěte následující derivace:

   a) $f'(\pi)$, $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$
   b) $f'(0)$, $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$
   c) $f'(x)$, $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$
   d) $f'(x)$, $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$
   e) $f'(-3)$, $f(x) = |x + 3|$
   f) $f'(x)$, $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x^2}$
   g) $f'(x)$, $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$
   h) $f'(x)$, $f(x) = x^x$.

2. Ve kterých bodech mají křivky o rovnicích
$$y = x^3 - x - 1 \text{ a } y = 3x^2 - 4x + 1$$
rovnoběžné tečny? [(1, −1), (1, 0)]

3. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{\frac{1}{x+1}}$$
je pro $x \in (0; \infty)$ konstantní a určete hodnotu této konstanty.

4. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \arcsin\sqrt{1 - 4x} + \frac{1}{2}\arcsin(8x - 1)$$
je konstantní. Určete hodnotu této konstanty a definiční obor funkce f.

5. Vypočtěte derivace následujících funkcí ve všech bodech definičního oboru:

   a) $f(x) = \arcsin x - \frac{1}{2}\arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$
   b) $f(x) = 3x - 3\sqrt[3]{(x-1)^2}$
   c) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}\arccos x$
   d) $f(x) = |1 + x|^{|1-x|}$.

2. L'Hospitalovo pravidlo

Vypočtěte limity:

1. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 2^x}{15^x - 3^x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}, \quad a, b > 0$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} x\ln x^2$

[a) $\frac{\ln 4}{\ln 5}$ b) 2 c) 1 d) 0]

2. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 - \mathrm{e}^{2x})\operatorname{cotg} x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$ d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

[a) -2 b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) 1, ale l'H nelze použít]

3. a) $\displaystyle\lim_{x\to 1_-} (\sin\pi x)^{\ln x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^x$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2\sin x^2}$

[a) 1 b) e c) 0 d) $\frac{1}{2}$]

4. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} x^x$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$

[a) 0 b) 1 c) 1 d) 1]

5. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\{\frac{\alpha}{\ln x} + \frac{1}{x}\}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

[a) 2 b) 1 c) e^α d) 2]

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6\sin x - 6x + x^3}$ [16]

*„To, co stojí za sdělení, se vejde do dvou tří řádků.
Zbytek jsou vysvětlivky k nejasným formulacím.“*

1. Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce postupujte podle těchto kroků:

1. definiční obor;
2. průsečíky grafu s osami souřadnými;
3. spojitost v bodech definičního oboru; sudost, lichost;
4. limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti, pokud existují;
5. asymptoty v ∞ a v $-\infty$, vertikální asymptoty;
6. existence a hodnota oboustranné derivace, resp. jednostranných derivací;
7. maximální intervaly, na nichž je funkce monotónní;
8. extrémy a lokální extrémy;
9. maximální intervaly, na nichž je funkce konkávní, resp. konvexní, inflexní body;
10. nakreslete graf funkce a určete obor hodnot.

Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

d) $f(x) = x^2 \ln^2 x$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x} - 1$

h) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$

i) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$

j) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$

k) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

m) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$

n) $f(x) = |2-x|\mathrm{e}^{x-1}$

1. Taylorova věta. Taylorův polynom

1. Najděte Taylorův polynom stupně n funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0:

   a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,, \quad x_0 = 0\,, \quad n = 2$ [$T_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$]

   b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}\,, \quad x_0 = 0\,, \quad n = 3$ [$T_3(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$]

   c) $f(x) = \sqrt{1+x}\sin x\,, \quad x_0 = 0\,, \quad n = 3$ [$T_3(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^3$]

   d) $f(x) = 2 - \ln \dfrac{x^2+1}{x+1}\,, \quad x_0 = 0\,, \quad n = 2$ [$T_2(x) = 2 + x - \frac{3}{2}x^2$]

2. Najděte Taylorův polynom 2. stupně pro funkci
$$f(x) = \sqrt{x-2}$$
v bodě $x_0 = 3$. Vyjádřete zbytek a z jeho tvaru zjistěte, zda je $f(3,1)$ větší než $T_2(3,1)$. [$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{8}(x-3)^2$, $T_2(3,1) < f(3,1)$]

3. Pro která x platí
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$
s chybou menší než $0,5 \cdot 10^{-4}$? [$|x| < 0,186121$]

4. Jestliže nahradíme hodnotu $\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}$ hodnotou Taylorova polynomu pátého stupně, dopustíme se chyby menší než 10^{-6}? [ano]

5. Pomocí Taylorova polynomu vypočtěte limity:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ [0]

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$ [$-\frac{1}{6}$]

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x - x(x+1)}{x^3}$ [$\frac{1}{3}$]

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x \cdot \operatorname{arctg} x - x}{x(2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} - 1)}$ [$\frac{5}{6}$]

6. Najděte Taylorův polynom 2. stupně pro funkci
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$
v okolí bodu $x_0 = 1$. Vyjádřete zbytek a z jeho tvaru dokažte, zda platí $f(0,9) > T_2(0,9)$. [$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2$, neplatí]

7. Energie volné částice je v teorii relativity dána vztahem
$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$
Ukažte, že pro $v \ll c$ představuje veličina $T = E - m_0c^2$ kinetickou energii Newtonovské mechaniky.

2. Extrémy funkce na dané množině

1. Mezi všemi obdélníky se zadaným obvodem L najděte ten s **největším** obsahem.

   [čtverec o straně $\frac{L}{4}$]

2. Do kruhu o poloměru R vepište obdélník s **největším** obsahem.

   [čtverec o straně $\frac{R}{\sqrt{2}}$]

3. Z koule o poloměru r vyřízněte kužel **maximálního** objemu.

   [poloměr podstavy $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$, výška $\frac{4}{3}r$]

4. Na válcovou konzervu se smí spotřebovat $S\,\mathrm{dm}^2$ plechu. Jaké má mít rozměry, aby měla co **největší** objem?

   [poloměr podstavy $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, výška $2r$]

5. Do elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$ vepište obdélník **maximálního** obsahu. Určete jeho rozměry.

   [$a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$]

6. Určete rozměry válcové nádoby s (resp. bez) víka tak, aby při objemu 2 litry měla nádoba **minimální** povrch.

   [$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$, $v = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$; resp. $r = v = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$]

7. Určete stranu čtverce, který musíme vystřihnout ve všech rozích obdélníkového papíru o rozměrech $8\,\mathrm{cm} \times 5\,\mathrm{cm}$ tak, aby po složení vznikla krabička **maximálního** objemu.

   [$1\,\mathrm{cm}$]

„Vyhýbám se s hrůzou nejjednoduššímu sčítání; ale podnes lituji, že jsem nebyl ani trochu zasvěcen do tajemství integrálů a diferenciálů. Neboť není, myslím, účelem střední školy, aby absolvent podržel slovíčka a vzorce, jimž se učil, nýbrž myšlenkové metody, na kterých to vše visí. Umět, to je dočasné, ale porozumět, to je trvalé obohacení ducha.“

K. Čapek

1. Primitivní funkce

1. Dokažte, že dané dvě funkce $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou primitivní k téže funkci a určete konstantu, o kterou se liší:

   a) $F_1(x) = \ln\sqrt{x-2} + 3\,, \quad F_2(x) = \ln\sqrt{2x-4}$

   b) $F_1(x) = \cos 2x\,, \quad F_2(x) = 6\cos^2 x + 4\sin^2 x$

2. Dokažte, že funkce $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$:

   a) $F(x) = x(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}) + \pi$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\quad x > 0$

   b) $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+13})$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+13}}\,.$

3. Najděte příslušné primitivní funkce (a proveďte zkoušku):

   a) $\int (x^3 + x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$ b) $\int (3x-7)\,\mathrm{d}x$ c) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   d) $\int (1+2x)^3\,\mathrm{d}x$ e) $\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x$ f) $\int \dfrac{4}{2\sqrt{3x}}\,\mathrm{d}x$

   g) $\int \dfrac{x^2+2x}{x-1}\,\mathrm{d}x$ h) $\int \dfrac{x^3+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ i) $\int \dfrac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x$

   j) $\int (\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x$ k) $\int (\cos 3x + 3x + 1)\,\mathrm{d}x$ l) $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$

4. Najděte primitivní funkce:

   a) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\dfrac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C\right]$

   b) $\int \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[-\dfrac{1}{4}\cos 2x + C\right]$

   c) $\int \mathrm{e}^x \cdot 5^{x-1}\,\mathrm{d}x$ $\quad \left[\dfrac{1}{5\ln 5\mathrm{e}}(5\mathrm{e})^x + C\right]$

   d) $\int \dfrac{x}{|x|}\,\mathrm{d}x$, $x < 0$ $\quad [-x + C]$

   e) $\int x^5\,\mathrm{d}y\,.$ $\quad [x^5 y + C]$

5. Najděte primitivní funkce (metodou substituce):

a) $\displaystyle\int 5^{3x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}+C\right]$

b) $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{1}{2}\arcsin 2x+C\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x+C\right]$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+3}\,\mathrm{d}x\,.$ $\qquad\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{\sqrt{3}}+C\right]$

6. Najděte primitivní funkce (metodou substituce):

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C\right]$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad[\ln(1+\mathrm{e}^x)+C]$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad[\ln(1+\mathrm{e}^x)+C]$

d) $\displaystyle\int \frac{3^x}{1+9^x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg} 3^x+C\right]$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\,.$ $\qquad[\operatorname{arctg}(x+2)+C]$

7. Najděte primitivní funkce (metodou per-partes):

a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad[-\mathrm{e}^{-x}(x+1)+C]$

b) $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\dfrac{x^3}{9}(3\ln x-1)+C\right]$

c) $\displaystyle\int \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$ $\qquad[(x+1)\ln(x+1)-x+C]$

d) $\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$ $\qquad\left[\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\right]$

e) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x\,.$ $\qquad\left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\right]$

8. Zvolte vhodnou metodu a najděte příslušnou primitivní funkci:

a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ $\qquad[\operatorname{tg} x-x+C]$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{5\cos x}\,\mathrm{d}x$ $\left[-\frac{2}{5}\cos x + C\right]$

c) $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C\right]$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ $[-\mathrm{cotg}\, x - \mathrm{tg}\, x + C]$

e) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$ $[x\ln x - x + C]$

f) $\displaystyle\int \mathrm{cotg}\, x\,\mathrm{d}x$ $[\ln|\sin x| + C]$

g) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ $[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C]$

h) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ $[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C]$

i) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x$ $[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C]$

j) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+5}\,\mathrm{d}x$ $[\frac{2}{3}\sqrt{(x^3+5)^3} + C]$

k) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$ $[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C]$

l) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x\,\mathrm{d}x$ $[-\frac{1}{4}\cos^4 x + C]$

m) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ $[\frac{1}{2}\ln^2 x + C]$

n) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$ $[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C]$

o) $\displaystyle\int \sin x \cdot \ln \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$ $[-\cos x \cdot \ln \mathrm{tg}\, x + \ln|\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2})| + C]$

p) $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$ $[x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C]$

q) $\displaystyle\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ $[-\mathrm{cotg}\, x(1+\ln\sin x) - x + C]$

r) $\displaystyle\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x\,\mathrm{d}x$ $[\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C]$

s) $\displaystyle\int \sin\ln x\,\mathrm{d}x\,.$ $[\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C]$

Matematikovy výtvory, stejně jako malířovy či básníkovy,
musí zaujmout svojí krásou …Krása je základním měřítkem
a nepěkná matematika nikde ve světě dlouho neobstojí.
G. H. Hardy

1. Najděte příslušné primitivní funkce. Správnost výpočtu si ověřte derivováním výsledku.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad [-\operatorname{cotg}(x/2)+C]$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\operatorname{tg} x+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C\right]$

f) $\displaystyle\int (\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ [návod: volte $\varphi(t)=1+t^2$]

h) $\displaystyle\int \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ [návod: volte $\varphi(t)=1+t^2$]

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ [návod: volte $\varphi(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$]

j) $\displaystyle\int \frac{1}{a+bx^2}\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ [návod: volte $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$]

l) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ [návod: volte $\sqrt{1-4x-x^2}=1+xt$]

n) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ [návod: volte $t=\operatorname{tg} x$]

o) $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x+2\cos x+5}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ [návod: volte $t=\operatorname{tg}(x/2)$]

p) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ [návod: volte $t = \operatorname{tg} x$]

q) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\text{návod: volte } \sqrt{1+x+x^2} = x+t\right]$

r) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\text{návod: volte } z = \sin x, \sqrt{1+z^2} = z+t\right]$

s) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right| + C\right]$

t) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + 2\cos x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\text{návod: volte } t = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right]$

u) $\displaystyle\int \frac{2\sin x - 3\cos x}{\sin x + 5\cos x}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{4}\ln\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{(\operatorname{tg} x + 5)^2} - \frac{1}{2}x + C\right]$

v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right) + C\right]$

w) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{12x-9x^2-2}}\,\mathrm{d}x$ $\left[\text{návod: volte } t = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}\right]$

x) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) + C\right]$

„Vědění je poklad, ale praxe je k němu klíč.“
Thomas Fuller

♣ **Teoretický základ:** určitý integrál Newtonův a Riemannův, nevlastní integrál, aplikace určitého integrálu

1. Určitý integrál

1. Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$ $\qquad [\pi^3 - 6\pi]$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{9x^2+4} \,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{\pi}{24}\right]$

c) $\displaystyle\int_{-4}^{0} (x - |x+2|) \,\mathrm{d}x$ $\qquad [-12]$

d) $\displaystyle\int_0^{6} f(x) \,\mathrm{d}x\,,\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \langle 0; 2 \rangle \\ \frac{8}{x}, & x \in \langle 2; 6 \rangle \end{cases}$ $\qquad \left[\frac{8}{3} + 8\ln 3\right]$

e) $\displaystyle\int_1^{4} f(x) \,\mathrm{d}x\,,\ f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \langle 1; 3 \rangle \\ -2x+10, & x \in \langle 3; 4 \rangle \end{cases}$ $\qquad [23]$

2. Vypočtěte nevlastní integrály:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$ $\qquad [1]$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{2-x} \,\mathrm{d}x$ $\qquad [-\infty,\ \text{integrál diverguje}]$

d) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 \mathrm{d}x$ $\qquad \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - 4\ln\frac{9}{8}\right]$

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ [integrál diverguje]

f) $\displaystyle\int_0^{12} \frac{x}{(x-3)(x-4)}\,\mathrm{d}x\,.$ [integrál diverguje]

3. Vypočtěte:

   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\,\mathrm{d}x\,.$ [a) -1; b) -4]

4. Rozmyslete si, zda lze u následujících příkladů použít nabízenou substituci:

   a) $\displaystyle\int_1^{4} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,\quad x=\sin z$ [nelze]

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{1+k^2\mathrm{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x\,,\ k>0,\ k\neq 1\,,\qquad y=\mathrm{tg}\,x\,.$ [přímo nelze, problém v $\frac{\pi}{2}$]

2. Střední hodnota

1. Vypočtěte střední a efektivní hodnotu střídavého proudu

$$i(t)=I_m\sin\omega t.$$

[$\overline{I}=0,\ I_{ef}=\frac{\sqrt{2}}{2}I_m$]

2. Vypočtěte střední hodnotu funkce

$$f(t)=\frac{1}{1+t^2}\quad \text{na intervalu } \langle -1;1\rangle.$$

[$\frac{\pi}{4}$]

3. Odhadněte hodnotu integrálu

$$I=\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}\,\mathrm{d}x.$$

[$0.37\le I\le 1.16$]

3. Geometrický význam určitého integrálu

1. Určete obsah rovinného obrazce omezeného grafem funkce

   $f: y=x^2-x-2$ a osou x. [$\frac{9}{2}j^2$]

2. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

   $y=x^2$ a $y=2-x^2.$ [$\frac{8}{3}j^2$]

3. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

   $y=x^3$ a $y=4x.$ [$8j^2$]

4. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

   $y = 2^x$, $\quad y = 2$ a $\qquad x = 0$. $\hfill [2 - (\ln 2)^{-1} j^2]$

5. Určete obsah obrazce ohraničeného parabolou $\mathcal{P} : y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $T_1 = [0, y_1]$ a $T_2 = [3, y_2]$. $\hfill [\frac{9}{4} j^2]$

6. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

   $f(x) = \frac{1}{2}\cos^3 x$, $\quad g(x) = \cos x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. $\hfill [\frac{4}{3} j^2]$

7. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

   $f(x) = 2x - x^2$, $\quad g(x) = 2x^2 - 4x$, a $h(x) = -x$. $\hfill [\frac{23}{8} j^2]$

8. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

   $x = 1$, $\quad y = x^2 - 1$ $\quad$ a $\qquad y = 2 - |x - 1|$, $x \in (-\infty; 1\rangle$. $\hfill [\frac{10}{3} j^2]$

4. Aplikace určitého integrálu

1. Vypočtěte plošný obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí

   a) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\quad g(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $\quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ $\hfill [\frac{\pi}{4} - 1 + \ln\sqrt{2}]$

   b) $f(x) = (2x - 1)\ln(1 - x)$, $\quad g(x) = 0$, $\quad x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ $\hfill [-\frac{1}{8}(2\ln\frac{1}{2} + 1)]$

   c) $f(x) = x\cos 2x$, $\quad g(x) = 0$, $\quad x \in \langle -\frac{\pi}{4}, 0)$. $\hfill [\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}]$

2. Vypočtěte délku křivky zadané parametricky

   a) $x(t) = \sqrt{(1 + 2t)^3}$, $\quad y(t) = \sqrt{(2 - t)^3}$, $t \in \langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle$ $\hfill [\frac{1}{7}(\sqrt{20^3} - \sqrt{2{,}5^3})]$

   b) $x(t) = \sqrt{1 - t}$, $y(t) = \sqrt{1 + t}$, $\quad t \in \langle -1, 1 \rangle$ $\hfill [\frac{\sqrt{2}}{2}\pi]$

   c) $x(t) = \sqrt{4 - t^2}$, $y(t) = t + 1$, $\quad t \in \langle -2, 2 \rangle$ $\hfill [2\pi]$

   d) $x(t) = 2 - t$, $y(t) = \sqrt{9 - t^2}$, $\quad t \in \langle -3, 3 \rangle$. $\hfill [3\pi]$

3. Vypočtěte objem sudu s parabolickou oblinou, je-li poloměr dna r, poloměr středního řezu $\varrho > r$ a výška sudu v?

4. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného grafem funkce

   $$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\cos\frac{1}{x}}, \quad x \in \left\langle \frac{2}{\pi}, \infty \right) \qquad \text{b) } f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\sin\frac{1}{x}}, \quad x \in \left\langle \frac{1}{\pi}, \infty \right)$$

   a osou x kolem osy x. Načrtněte graf funkce $f(x)$. $\hfill$ [a) π; b) 2π]

5. Křivka $r = \sin 2\varphi$ má tvar „dvojlístku“.
   Vypočtěte plošný obsah P jednoho lístku. $\hfill [\frac{\pi}{8}]$

6. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného grafem funkce
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad x \geq 0$$
a osou x kolem osy x. Načrtněte graf funkce $f(x)$. $[\frac{3}{16}\pi^2]$

7. Vypočtěte obsah čtvrtiny kruhu o poloměru R ležící v I. kvadrantu pomocí aplikace určitého integrálu. Souřadnice uvažujte
a) kartézské b) polární.

8. Vypočtěte délku kružnice dané
a) kartézsky b) polárně.

9. Vypočtěte objem paraboloidu výšky v. $[\frac{1}{2}\pi v^2]$

10. Vypočtěte povrch pláště kužele o poloměru podstavy R a výšce v.

11. Vypočtěte délku křivky zadané v polárních souřadnicích
$r(\varphi) = 4\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$ $[4\pi\sqrt{1+4\pi^2} + 2\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$

1. Množiny bodů v E^n a jejich vlastnosti

Určete a nakreslete definiční obor funkce dvou proměnných $f(x, y)$ a rozhodněte, které z následujících vlastností množina $D(f)$ má / nemá: otevřená, uzavřená, souvislá, konvexní, omezená, kompaktní?

- $f(x, y) = \ln \dfrac{5x}{y-3}$ [je otevřená]
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ [je ot., uz., souv., konv.]
- $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ [je uz., souv., konv., omez., komp.]
- $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y - x)$ [je ot., uz., souv., konv.]
- $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$ [je uz., souv., konv.]
- $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$ [je uzavřená]
- $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$ [je uz., souv.]
- $f(x, y) = \ln(x \ln(y - x))$ [je otevřená]
- $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ [je ot., souv.]
- $f(x, y) = \operatorname{cotg} \dfrac{y}{x}$ [je otevřená]
- $f(x, y) = \arcsin y + \ln(4 - x^2 - y^2)$ [je konv., souv., omez.]
- $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$ [je souv., omez.]
- $f(x, y) = \dfrac{1}{y - x} + \sqrt{x - y^2}$. [nemá žádnou z uvedených vlastností]

2. Funkce více proměnných

1. Načrtněte graf funkce $f(x, y)$:

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ [Pozn. rotační paraboloid]

   b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ [Pozn. rotační kuželová plocha]

   c) $f(x, y) = x^2 - y^2$ [Pozn. „sedlo"]

   d) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ [Pozn. rotační „elipsoid"]

   e) $f(x, y) = 8 - 2x^2 - 2y^2$ [Pozn. rotační paraboloid]

   f) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$. [Pozn. „tunel" - polovina válcové plochy]

2. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,2]} \dfrac{x^2y - xy^3 + 2}{(x-y)^2}$ [$\frac{4}{3}$]

b) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x-y}{x+y}$ [limita neexistuje]

c) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{5(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ [20]

d) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$ [0]

e) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ [limita neexistuje]

f) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. [limita neexistuje]

3. Rozhodněte o spojitosti funkce

a) $f(x,y) = 8 - 2x^2 - y^2$ [funkce je spojitá na svém def. oboru]

b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ [funkce je spojitá na svém def. oboru]

c) $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$ [funkce je spojitá na svém def. oboru]

d) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ [funkce je spojitá na svém def. oboru]

e) $f(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin(x^2+y^2))$.

[funkce není spoj. v bodech $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$]

4. Vypočtěte parciální derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$:

a) $f(x,y) = x^3y + 2x\dfrac{1}{y} + 3x$ [$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + \frac{2}{y} + 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 2\frac{x}{y^2}$]

b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ [$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$]

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x+y)$ [$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+y)^2}$]

d) $f(x,y) = \sin(2x+y)$ [$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(2x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(2x+y)$]

e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ [$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$]

f) $f(x,y) = x\sqrt{y^2-x^2}$. [$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2-2x^2}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{y^2-x^2}}$]

5. Napište rovnice tečných rovin k ploše

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$$

rovnoběžných s rovinou $\alpha : x + 4y + 6z = 0$.

[$\tau_1 : x + 4y + 6z - 21 = 0$, $\tau_2 : x + 4y + 6z + 21 = 0$]

6. Dokažte, že plochy

$$x + 2y - \ln z + 4 = 0 \qquad \text{a} \qquad x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$$

se dotýkají v bodě $T = [2, -3, 1]$. [v daném bodě mají totožné tečné roviny]

7. Vypočtěte gradient funkce f v bodě A:

   a) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{y + z}$; $A = [2, 3, -1]$ [$(2, -1, -1)$]

   b) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2}$; $A = [-\frac{1}{2}, 1]$ [$(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$]

   c) $f(x, y) = xy + 3x^2 - y^2$; $A = [2, -4]$ [$(8, 10)$]

   d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y - x}$; $A = [1, 2]$. [$(2, -1)$]

8. Najděte body $[x, y]$, ve kterých má funkce

$$f(x, y) = \ln \frac{1 + xy}{x}$$

gradient $\operatorname{grad} f(x, y) = (-\frac{16}{9}, 1)$. [$A_1 = [\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}]$, $A_2[-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}]$]

9. Napište rovnici tečné roviny k ploše $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ v bodě

   a) $A = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ [$x + y - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$]

   b) $B = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. [$-\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - z + \sqrt{2} = 0$]

10. Určete body, v nichž má funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

derivaci ve směru libovolného vektoru rovnou nule. [$A = [0, 0]$, $B = [1, 1]$]

11. Dokažte, že funkce

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x + y}} - y\sqrt{x + y}$$

vyhovuje uvedené parciální diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

12. Napište Taylorův polynom stupně $n = 3$ pro funkci $f(x, y)$ na okolí bodu $[0; 0]$:

    $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$. [$T_3(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(-x^2 - y^2)$]

13. Vypočtěte totální diferenciál funkce

$f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$. $\left[\dfrac{1 + y^2}{(1 - xy)^2 + (x + y)^2}\, \mathrm{d}x + \dfrac{1 + x^2}{(1 - xy)^2 + (x + y)^2}\, \mathrm{d}y\right]$

14. Pomocí totálního diferenciálu vhodně zvolené funkce ve vhodném bodě vypočtěte přibližnou hodnotu

$$\arcsin\frac{0,98}{2,06} \qquad\qquad [f(x,y)=\arcsin\tfrac{x}{y} \text{ v bodě } [1,2],\ \doteq 0,494731]$$

15. Pomocí diference i diferenciálu určete změnu obsahu obdélníku, jehož strana $a = 65$ cm se zvětší o 1 cm a strana $b = 1,10$ m se zmenší o 2 cm.

16. Dokažte, že funkce

$$u(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$$

vyhovuje parciální diferenciální rovnici

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2\,.$$

17. Vypočtěte totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2} \text{ v bodě } A = [1,2].$$

$$[\mathrm{d}f(1,2) = \tfrac{6\sqrt{5}}{5}\mathrm{d}x + \tfrac{2\sqrt{5}}{5}\mathrm{d}y]$$

18. Napište rovnici tečné roviny k ploše určené grafem funkce

$$f(x,y) = x^3 + xy^2$$

v bodě $A = [2, 1, z_A]$.

$$[\tau : z = 10 + 13(x-2) + 4(y-1)]$$

1. Extrémy funkcí více proměnných

1. Najděte lokální extrémy funkce více proměnných:

   a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ [lok. max. v b. $[-2,-1]$, lok.min. v b. $[2,1]$]

   b) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ [lok. min. $[\frac{1}{2},1,1]$, lok. max. $[-\frac{1}{2},-1,-1]$]

   c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ [lok. min. v bodě $[-1,-2,3]$]

   d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6$ [lok. min. v bodě $[\frac{1}{3},-\frac{4}{3},2]$]

   e) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$ [lok. max. v bodě $[2,2]$]

   f) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$ [funkce nemá žádný lokální extrém]

   g) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2 - 2x + 16y + 34)^{-1}$ [lok. max. v bodě $[1,-4]$]

   h) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{4-y^2}$ [lok. max. v bodě $[0,0]$]

   i) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ [lok. max. v bodech $[0,\pm 1]$, lok. min. v bodě $[0,0]$]

   j) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ [lok. min. v bodě $[\frac{1}{2},-1]$]

2. Určete absolutní maximum a minimum funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$$

   na uzavřeném trojúhelníku s vrcholy $A=[0,0]$, $B=[3,0]$, $C=[0,5]$.

   [max. $f([0,5]) = 6$, min. $f([1,2]) = -4$]

3. Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = xy^2(4-x-y)$$

   v uzavřené oblasti $\overline{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$.

   [max. $f(1,2) = 4$, min. $f(2,4) = -64$]

4. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

   uvnitř obdélníku $(0,x) \times (0,y)$. [lok. min. v bodě $[5,2]$]

5. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x + y = 1$.

   [lok. min. v bodě $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$]

6. Najděte absolutní extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

   v uzavřené oblasti $\overline{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

   [max. $f(1,2) = 17$, min. $f(1,0) = -3$]

7. Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže o objemu $32\mathrm{m}^3$tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch. [4m, 4m, 2m]

8. Určete rozměry kvádru s daným objemem V tak, aby kvádr měl minimální povrch. $[a = b = c = \sqrt[3]{V}]$

9. Číslo 24 rozložte na součet tří kladných čísel tak, aby jejich součin byl minimální. $[8 + 8 + 8]$

10. Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^y - x$$

v bodě $[1; 1; f(1)]$. Zjistěte, zda má funkce v bodě $[1; 1]$ lokální extrém. [$z = 0$, nemá extrém, jde o sedlový bod]

11. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + y \ln x\,.$$

V těchto bodech napište obecnou rovnici tečné roviny ke grafu funkce f. [funkce nemá žádný lokální extrém]

12. Najděte lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = 2 \ln xy - x^2 - y$$

a napište obecnou rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v některém z nalezených extrémů. [lok. max. $[1, 2]$, $z = 2 \ln 2 - 3$]

13. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2(1 + 2y^2) - 2x\,.$$

V těchto bodech napište obecnou rovnici tečné roviny ke grafu funkce f. [lok. min. $[1, 0]$, $f(1, 0) = -1$, $z = -1$]

14. Najděte lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = y + \frac{1}{y} - 2 \ln^2 x$$

a napište obecnou rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v některém z nalezených extrémů. [lok. max. v bodě $[1, -1]$, $z = -2$, sedlový bod $[1, 1]$]

1. Funkce více proměnných - derivace složené funkce

1. Jsou dány funkce
$$f(u,v) = u\mathrm{e}^{-v}, \quad g(x,y,z) = [xyz, x+2y+3z]$$
a funkce složená $F = f \circ g$. Vypočtěte $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)$.

2. Jsou dány funkce
$$F(a,b), \quad a(x,y) = xy, \quad b(y,z) = yz$$
a funkce složená $f(x,y,z) = F(a(x,y), b(y,z))$. Vypočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z)$.
$[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial b}(yx+yz) + \frac{\partial F}{\partial b}]$

3. Jsou dány funkce
$$F(a,b), \quad a(x,y,z) = x^2+y^2, \quad b(x,y,z) = x^2+z^2$$
a funkce složená $f(x,y,z) = F(a(x,y,z), b(x,y,z))$. Vypočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z)$.
$[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z) = 4xy\left(\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b}\right)]$

4. Jsou dány funkce
$$F(a,b), \quad a(x,y,z) = xyz, \quad b(x,y,z) = x^2+z^2$$
a funkce složená $f(x,y,z) = F(a(x,y,z), b(x,y,z))$. Vypočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z)$.
$[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}x^2yz + \frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial b}2xz^2 + \frac{\partial F}{\partial a}x]$

5. Nechť $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Transformujte diferenciální výraz
$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$$
do polárních souřadnic r, φ ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
Uvažujte $(r,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi)$. $\left[\frac{\partial \widehat{z}}{\partial \varphi}; \quad \widehat{z}(r,\varphi) = z(x,y)\right]$

6. Nechť $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Transformujte diferenciální výraz
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$
do polárních souřadnic r, φ ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).
Uvažujte $(r,\varphi) \in (0,\infty) \times (0,2\pi)$. $\left[r\frac{\partial \widehat{z}}{\partial r}; \quad \widehat{z}(r,\varphi) = z(x,y)\right]$

7. Transformujte Laplaceův operátor
$$\triangle z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
do polárních souřadnic. $\left[\frac{\partial^2 \widehat{z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widehat{z}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{z}}{\partial r}\right]$

2. Funkce zadaná implicitně

1. Najděte pro funkci $y = f(x)$ definovanou implicitně rovnicí

$$y + \sin y - x = 0$$

Taylorův polynom 3. stupně v bodě $[0, 0]$. $[T_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{96}x^3]$

2. Zjistěte, zda spojitá funkce $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí

$$\mathrm{e}^{x+y} - xy + 2y = 0$$

je v bodě $[1, -1]$ rostoucí / klesající / konvexní / konkávní. [klesající, konkávní]

3. Ověřte, že v okolí bodu $A = [0, 0]$ je rovnicí

$$F(x, y) = x^3y - \sin y - \sin x = 0$$

implicitně definována funkce $y = f(x)$. Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$ a pomocí tohoto polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu $f(-0,2)$. $[T_2(x) = -x,\ f(-0,2) \doteq 0,2]$

4. Ověřte, že v okolí bodu $A = [1, 1]$ je rovnicí

$$F(x, y) = x \ln y - 2y \ln x = 0$$

implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = 1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní, konkávní. Má funkce $f(x)$ pro $x_0 = 1$ lokální extrém? Načrtněte graf funkce $f(x)$ v okolí bodu A. [rostoucí, konvexní]

5. Ověřte, že v okolí bodu $A = [1, 0]$ je rovnicí

$$F(x, y) = y + \cos y - x^3 = 0$$

implicitně definována funkce $y = f(x)$. Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 1$ a pomocí tohoto polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu $f(1, 1)$.

$[T_2(x) = 3(x-1) + \frac{15}{2}(x-1)^2,\ f(1,1) \doteq 0,375]$

6. Ověřte, že v okolí bodu $A = [-1, 1]$ je rovnicí

$$F(x, y) = x + y - \ln y^2 = 0$$

implicitně definována funkce $y = f(x)$. Zjistěte, zda v okolí bodu $x_0 = -1$ je funkce $f(x)$ rostoucí, klesající, konvexní, konkávní. Má funkce $f(x)$ pro $x_0 = -1$ lokální extrém? Načrtněte graf funkce $f(x)$ v okolí bodu A. [rostoucí, konvexní]

„To, co stojí za sdělení, se vejde do dvou tří řádků.
Zbytek jsou vysvětlivky k nejasným fomulacím.“

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

1. Dokažte, že funkce $\varphi(x) = -\ln(1+x)$ je na intervalu $I = (0; \infty)$ řešením diferenciální rovnice
$$xy' = \mathrm{e}^y - 1\,.$$

2. Dokažte, že funkce $\varphi(x) = \dfrac{C + x^2}{2x}$ je řešením diferenciální rovnice
$$xy' + y = x$$
a najděte partikulární řešení procházející bodem $[1; 2]$. $[C = 3, x \in (0, \infty)]$

3. Zjistěte, které z funkcí $\varphi_i(x)$ jsou řešením dané diferenciální rovnice:
$$y'' + 4y' + 4y = 0\,;$$
a) $\varphi_1(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ **b)** $\varphi_2(x) = A\mathrm{e}^{-2x}\,, \quad A \in \mathbb{R}$
c) $\varphi_3(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + Bx\mathrm{e}^{-2x}\,,\ A, B \in \mathbb{R}$ **d)** $\varphi_4(x) = \sin 2x$
e) $\varphi_5(x) = \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x\,.$ $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$

4. Ověřte, že funkce $\varphi_c : \varphi_c(x) = 1 + c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $c \in \mathbb{R}$ jsou řešením rovnice
$$y' = x(y - 1)$$
na intervalu $(-\infty, \infty)$. Najděte maximální řešení této rovnice procházející bodem $(x_0, y_0) = (\sqrt{2\ln 3}, 2)$.

5. Najděte všechna řešení diferenciální rovnice
$$y' = 3x^2\,.$$
Najděte všechna její maximální řešení procházející bodem $(1, 4)$.

Separace proměnných

6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice
$$y' = y^2 + 1$$
a dále určete alespoň jedno maximální řešení, které prochází bodem $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

7. Uvažujte rovnici
$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$$
jako rovnici tvaru $y' = f(x,y)$ a ověřte, že funkce f je lokálně lipschitzovská na oblasti $\Omega^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ i $\Omega^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\}$. Ověřte, že funkce
$$\varphi : \varphi(x) = (x+c)^3, \quad c \in \mathbb{R}$$
a funkce $\varphi_0 \equiv 0$ jsou řešeními této rovnice. Najděte alespoň čtyři maximální řešení procházející bodem $(1,0)$.

8. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice
$$y' - y \sin x = 0$$
vyhovující počáteční podmínce $y(\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{e}$. $[y = -\mathrm{e}^{1-\cos x}\,, x \in \mathbb{R}]$

9. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice
$$y' = 2xy - 6x$$
vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 4$. $\left[y = 3 + \mathrm{e}^{x^2}\,, x \in \mathbb{R}\right]$

10. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice
$$y' = \frac{y}{2}\operatorname{cotg} x$$
vyhovující počáteční podmínce $y(\frac{\pi}{2}) = 2$. $\left[y = 2\sqrt{\sin x}\,, x \in (0;\pi)\right]$

11. Řešte separací proměnných rovnice:

a) $y' = \sqrt{1-y^2}$
b) $y' = y^2$
c) $y' = \sqrt{y}$
d) $y' = y^{\frac{2}{3}}$
e) $y' = \dfrac{y}{x}$
f) $y' = -\dfrac{y}{x}$
g) $2y' - 4y + 3 = 0$
h) $(1-x)y' = 1 + y$.

VARIACE KONSTANTY

12. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

a) $xy' + y = \sin x$ $\left[\dfrac{-\cos x + C}{x}, x > 0\,, \text{ resp. } x < 0\right]$

b) $(1 - x^2)y' = xy + a\,,\ a \in \mathbb{R}\,,\ |x| < 1$ $\left[y = \dfrac{a \arcsin x + C}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| < 1\right]$

c) $(1 - x^2)y' = xy + ax\,,\ a \in \mathbb{R}\,,\ |x| < 1$ $\left[y = -a + \dfrac{C}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| < 1\right]$

d) $y' + y = \cos x$ $\left[y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + Ce^{-x}, x \in \mathbb{R}\right]$

e) $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2}y = 1 + x^2\,.$ $[y = (C + x)(1 + x^2)\,, x \in \mathbb{R}]$

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}\,.$$

$\left[y = (\frac{1}{2}x^2 + C)e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}\right]$

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + y \cos x = \sin 2x\,.$$

$\left[y = (2 \sin x - 2) + Ce^{-\sin x}, x \in \mathbb{R}\right]$

Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - y = \frac{e^x}{x}\,.$$

$[y = Ce^x + e^x \ln |x|\,, x > 0 \text{ resp. } x < 0]$

Vědcovy předsudky se nazývají "teorie".
M. Twain

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE, SPECIÁLNÍ PRAVÁ STRANA

1. Dokažte, že funkce $f_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}$, $f_2(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$ tvoří fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu a tuto rovnici sestavte. $[x'' + 4x' + 4x = 0]$

2. Dokažte, že funkce $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \cos t$ tvoří fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu a tuto rovnici sestavte. $[y'' + y = 0]$

3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

   a) $y'' - 5y' + 6y = 0$ $\quad [y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}\,, x \in \mathbb{R}]$

   b) $4y'' - 3y' = 0$ $\quad \left[y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x}\,, x \in \mathbb{R}\right]$

   c) $9y'' + 72y' + 225y = 0$ $\quad [y = \mathrm{e}^{-4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)\,, x \in \mathbb{R}]$

   d) $4y'' + y = 0\,.$ $\quad \left[y = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\,, x \in \mathbb{R}\right]$

4. Najděte alespoň jedno partikulární řešení diferenciální rovnice se spec. pravou stranou:

   a) $y'' + 5y' + 6y = \mathrm{e}^{-2x}$ $\quad [y_P = x\mathrm{e}^{-2x}]$

   b) $y'' + 5y' + 6y = 7$ $\quad \left[y_P = \frac{7}{6}\right]$

   c) $y'' + 5y' + 6y = 7 + \mathrm{e}^{-2x}$ $\quad \left[y_P = \frac{7}{6} + x\mathrm{e}^{-2x}\right]$

   d) $y'' + y = -\sin 2x$ $\quad \left[y_P = \frac{1}{3}\sin 2x\right]$

   e) $y'' + 2y' + y = x^2 - 12\,.$ $\quad [y_P = x^2 - 4x - 6]$

5. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

   a) $y'' + 4y = 8\sin 2x$ $\quad [y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x\cos 2x\,, x \in \mathbb{R}]$

   b) $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x} + 2x - 3$ $\quad [y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} + x\,, x \in \mathbb{R}]$

   c) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad \left[y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}\,, x \in \mathbb{R}\right]$

   d) $y'' + 4y' + 4y = -2\mathrm{e}^{-2x}$ $\quad [y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2x\mathrm{e}^{-2x} - x^2\mathrm{e}^{-2x}\,, x \in \mathbb{R}]$

   e) $y'' - 4y' + 4y = 8\mathrm{e}^{2x}\,.$ $\quad [y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x} + 4x^2\mathrm{e}^{2x}\,, x \in \mathbb{R}]$

6. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$9y'' - 6y' + y = 0$$

   při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. $\quad \left[y = 2x\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}\,, x \in \mathbb{R}\right]$

7. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 8y' + 20y = 0$$

při počátečních podmínkách $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$. $[y = e^{4x}(\cos 2x - 3\sin 2x)\,, x \in \mathbb{R}]$

8. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$4y'' - 3y' - y = 0$$

při počátečních podmínkách $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$. $\left[y = 2e^{x} - 4e^{-\frac{x}{4}}\,, x \in \mathbb{R}\right]$

9. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 3y' = -6xe^{3x}$$

při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{11}{3}$. $\left[y = -1 + e^{3x}(1 - x^2 + \frac{2}{3}x)\,, x \in \mathbb{R}\right]$

10. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

a) $y'' + 6y' + 9y = 12e^{-3x}(x-1)$ $[y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + x^2e^{-3x}(2x-6)]$

b) $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\cos x$ $\left[y = C_1e^{x}\cos x + C_2e^{x}\sin x + \frac{1}{2}xe^{x}\sin x\right]$

c) $y'' + 2y' + y = e^{x} + e^{-x}$ $\left[y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}\right]$

d) $y''' + 5y'' + 4y' = 8x - 3$ $\left[y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{-4x} + x(x - \frac{13}{4})\right]$

e) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ $\left[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}\right]$

f) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos x\,.$ $[y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} - e^{2x}\cos x]$

Moudrý je ten, kdo zná spíše užitečné věci než mnoho věcí.
Aischylos

Rozcvička

a) Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'(x-1) = y \ln y\,.$$

Rozhodněte, zda je možné v bodě $[1,1]$ použít *slepení* řešení.

$\left[y = \mathrm{e}^{C(x-1)}, \text{slepená funkce by v daném bodě neměla derivaci}\right]$

b) Najděte řešení úlohy

$$y''' - 2y'' + y' = \mathrm{e}^x$$

s podmínkou $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. $\left[y = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x\right]$

Snížení řádu

a) Metodou snížení řádu řešte diferenciální rovnici

$$y'' + y' = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,.$$

$[y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x} + x - \ln(\mathrm{e}^x+1) - \mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^x+1)]$

b) Metodou snížení řádu najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y''' + y'' - 2y' = 0\,.$$

$[y = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + C_3\mathrm{e}^{-2x}\,, x \in \mathbb{R}]$

c) Metodou snížení řádu řešte diferenciální rovnici

$$y'' = \frac{(y')^2}{x^2}$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$. $\left[y = \frac{1}{2}(x^2+1), x \in (0,\infty)\right]$

Homogenní a homogenizovatelné rovnice

a) $y' = \dfrac{2y}{x} + 1$ $[y = Cx^2 - x, C \in \mathbb{R}, x > 0,\ \text{resp. } x < 0]$

b) $y' = \dfrac{2x - y + 9}{x - 3y + 2}$ $[3(y+1)^2 - 2(x+5)(y+1) + 2(x+5)^2 = C]$

Bernoulliho rovnice

a) $xy' + y = y^2 \ln x$ $[y(1 + Cx + \ln x) = 0]$

b) $y' = \dfrac{x + y^2}{xy}\,,\quad x > 0$ $[y^2 - Cx^2 + 2x = 0]$

„Vyhýbám se s hrůzou nejjednoduššímu sčítání; ale podnes lituji, že jsem nebyl ani trochu zasvěcen do tajemství integrálů a diferenciálů. Neboť není, myslím, účelem střední školy, aby absolvent podržel slovíčka a vzorce, jimž se učil, nýbrž myšlenkové metody, na kterých to vše visí. Umět, to je dočasné, ale porozumět, to je trvalé obohacení ducha.“

K. Čapek

Aplikace určitého integrálu - opakování

Objem rotačního tělesa

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného grafem funkce

$$\text{a) } f(x) = \tfrac{1}{x}\sqrt{\cos\tfrac{1}{x}}\,, \quad x \in \left\langle \tfrac{2}{\pi}, \infty \right)$$

$$\text{b) } f(x) = \tfrac{1}{x}\sqrt{\sin\tfrac{1}{x}}\,, \quad x \in \left\langle \tfrac{1}{\pi}, \infty \right)$$

   a osou x kolem osy x. Načrtněte graf funkce $f(x)$. [a) π; b) 2π]

2. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného grafem funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,, \quad x \geq 0$$

   a osou x kolem osy x. Načrtněte graf funkce $f(x)$. [$\frac{3}{16}\pi^2$]

3. Vypočtěte objem rotačního válce o poloměru podstavy R a výšce v.

4. Vypočtěte objem koule o poloměru R.

5. Vypočtěte objem paraboloidu výšky v. [$\frac{1}{2}\pi v^2$]

6. Vypočtěte objem rotačního kužele o poloměru podstavy R a výšce v.

7. Vypočtěte objem elipsoidu určeného rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

8. Vypočtěte objem sudu s parabolickou oblinou, je-li poloměr dna r, poloměr středního řezu $\varrho > r$ a výška sudu v.

9. Objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce omezeného podmínkami $0 \leq a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq y(x)$ (kde $y(x)$ představuje spojitou funkci), kolem osy y, je roven
$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)\,\mathrm{d}x.$$
Dokažte!

10. Vypočtěte objem tělesa omezeného plochou, která vznikne rotací křivky $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$

    a) kolem osy x, $\left[V_x = \frac{1}{2}\pi^2\right]$

    b) kolem osy y. $[V_y = 2\pi^2]$

Délka křivky dané parametricky

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Vypočtěte délku křivky zadané parametricky

    a) $x(t) = \sqrt{(1+2t)^3}$, $y(t) = \sqrt{(2-t)^3}$, $t \in \langle -\frac{1}{2}, 2\rangle$ $[\frac{1}{7}(\sqrt{20^3} - \sqrt{2,5^3})]$

    b) $x(t) = \sqrt{1-t}\,,\ y(t) = \sqrt{1+t}\,,\quad t \in \langle -1, 1\rangle$ $[\frac{\sqrt{2}}{2}\pi]$

    c) $x(t) = \sqrt{4-t^2}\,,\ y(t) = t+1\,,\quad t \in \langle -2, 2\rangle$ $[2\pi]$

    d) $x(t) = 2-t\,,\ y(t) = \sqrt{9-t^2}\,,\quad t \in \langle -3, 3\rangle$. $[3\pi]$

2. Vypočtěte délku jednoho oblouku cykloidy o parametrizaci
$$x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

„Moudrost není produktem vzdělání,
ale celoživotním úsilím.“
A. Einstein

APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU – POKRAČOVÁNÍ

1. Určete plošný obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$y = \sin|x| \text{ a } y = \frac{1}{10}(x-2\pi)(x+2\pi), \quad x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle.$$

Obrazec načtrtněte! $\left[\frac{16}{15}\pi^3\right]$

2. Určete plošný obsah obrazce ohraničeného polární osou a jedním závitem Archimédovy spirály dané v polárních souřadnicích rovnicí $r = \varphi$. $\left[\frac{4}{3}\pi^3\right]$

3. Určete obsah rovinného obrazce omezeného grafem funkce

$f : y = x^2 - x - 2$ a osou x. $[\frac{9}{2}]$

4. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

$y = x^2$ a $y = 2 - x^2$. $[\frac{8}{3}]$

5. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

$y = x^3$ a $y = 4x$. $[8]$

6. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

$y = 2^x$, $y = 2$ a $x = 0$. $[2 - (\ln 2)^{-1}]$

7. Určete obsah obrazce ohraničeného parabolou $\mathcal{P} : y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $T_1 = [0, y_1]$ a $T_2 = [3, y_2]$. $[\frac{9}{4}]$

8. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$f(x) = \frac{1}{2}\cos^3 x$, $g(x) = \cos x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$. $[\frac{4}{3}]$

9. Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = 2x^2 - 4x$, a $h(x) = -x$. $[\frac{23}{8}]$

10. Určete obsah obrazce omezeného křivkami o rovnicích

$x = 1$, $y = x^2 - 1$ a $y = 2 - |x - 1|$, $x \in (-\infty; 1\rangle$. $[\frac{10}{3}]$

11. Vypočtěte plošný obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí

a) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ $[\frac{\pi}{4} - 1 + \ln\sqrt{2}]$

b) $f(x) = (2x-1)\ln(1-x)$, $g(x) = 0$, $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$

c) $f(x) = x\cos 2x$, $g(x) = 0$, $x \in \langle -\frac{\pi}{4}, 0)$. $[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}]$

12. Vypočtěte délku astroidy o parametrizaci $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $a > 0$, $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Jak velký plošný obrazec tato křivka ohraničuje? $\left[6a; \frac{3}{8}\pi a^2\right]$

13. Vypočtěte délku oblouku grafu funkce $y = \ln \sin x$, $x \in \langle \frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi \rangle$. $[\ln 3]$

14. Křivka $r = \sin 2\varphi$ má tvar „dvojlístku“.
Vypočtěte plošný obsah P jednoho lístku. $[\frac{\pi}{8}]$

15. Vypočtěte délku křivky zadané v polárních souřadnicích
$r(\varphi) = 4\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$ $[4\pi\sqrt{1+4\pi^2} + 2\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})]$

— ✠✠✠✠✠ —

16. Vypočtěte moment setrvačnosti rotačního válce o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose rotace. $\left[J = \frac{1}{2}mR^2\right]$

17. Vypočtěte moment setrvačnosti plné homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose jdoucí jejím středem. $\left[J = \frac{2}{5}mR^2\right]$

18. Vypočtěte moment setrvačnosti rotačního kužele o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose rotace. $\left[J = \frac{3}{10}mR^2\right]$

Zvědavost je nezřízená touha poznat věci neužitečné a zakázané.
Jan Ámos Komenský

Dvojný integrál

♣ **Teoretický základ:** dvojný integrál, Fubiniho věta

1. Proveďte záměnu pořadí integrace:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx\,. \qquad \left[\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy\right]$$

2. Vypočtěte:

a) $\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad D=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$ $\qquad [(\mathrm{e}-1)^2]$

b) $\iint_D x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad D=\langle 1,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ $\qquad \left[\frac{3}{2}\right]$

c) $\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad D=\{(x,y); x^2+y^2\le 2, x\ge 0, y\ge 0\}$ $\qquad \left[\frac{4}{3}\sqrt{2}\right]$

d) $\iint_D x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad D=\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle$ $\qquad \left[\ln\frac{3}{2}\right]$

e) $\iint_D yx^2\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad D=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\rangle$ $\qquad [2]$

3. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina M je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,1]$. $\qquad \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}}\right]$

4. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina M je trojúhelník s vrcholy $[-1,0]$, $[1,0]$, $[0,-1]$. $\qquad \left[\frac{\mathrm{e}^2-3}{2\mathrm{e}}\right]$

5. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina M je lichoběžník s vrcholy $A=[-2,0]$, $B=[-1,0]$, $C=[0,1]$, $D=[0,2]$. $\qquad [1-\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}]$

6. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina M je trojúhelník ohraničený přímkami $y = x$, $x = 0$, $y = \pi$. $[-2]$

7. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{\ln(x-y)}{y-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina M je rovnoběžník s vrcholy $A = [0,-2]$, $B = [2,0]$, $C = [0,-3]$, $D = [2,-1]$. $\left[\ln^2 2 - \ln^2 3\right]$

8. Proveďte záměnu pořadí integrace:

$$\int_{-4}^{0} \left(\int_{-\frac{y}{2}}^{2} \cos\frac{\pi y}{4x}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,,$$

a integrál vypočtěte. $\left[\int_0^2 \left(\int_{-2x}^{0} \cos\frac{\pi y}{4x}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{8}{\pi} \right]$

9. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y - 1 \geq 0\}$. $\left[\frac{1}{20}\right]$

10. Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina M je ohraničená křivkami $y = x$, $x = 2$, $y = \frac{1}{x}$. $\left[\frac{9}{4}\right]$

11. Vypočtěte pomocí dvojného integrálu obsah trojúhelníku $\triangle ABC$, kde $A = [0,0]$, $B = [-3,-3]$, $C = [1,-1]$. Správnost výsledku si poté ověřte pomocí analytické geometrie.

12. Vypočtěte integrál

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

jestliže množina M je ohraničená křivkami $y = 4 - x$, $x + y = 12$, $y^2 = 2x$. $\left[\frac{196}{3}\right]$

„Představivost je jediná zbraň ve válce proti realitě.“

DVOJNÝ INTEGRÁL – SUBSTITUCE

♣ **Teoretický základ:** dvojný integrál, Fubiniho věta, polární souřadnice, Jacobiho matice

1. Vypočtěte
$$\iint_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$. $[-6\pi^2]$

2. Vypočtěte
$$\iint_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}$. $\left[\frac{4}{3}\sqrt{2}\right]$

3. Vypočtěte
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad f(x,y) = \sqrt{4-\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$
jestliže D značí přirozený definiční obor funkce $f(x,y)$. $\left[\frac{256}{15}\pi\right]$

4. Vypočtěte
$$\iint_M \sqrt{x+y}\,\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže M je čtyřúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[2,2]$, $[\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]$, $[2+\frac{\pi}{2},2-\frac{\pi}{2}]$. $\left[\frac{16}{3}\right]$

5. Vypočtěte
$$\iint_M \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1\,,\ a,b>0\}$. $\left[\frac{2}{3}\pi ab\right]$

6. Vypočtěte
$$\iint_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\,, R>0\}$. $\left[\frac{2}{3}\pi R^3\right]$

7. Vypočtěte
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,,$$
jestliže D značí přirozený definiční obor funkce $f(x,y)$. $[2\pi]$

8. Vypočtěte
$$\iint\limits_M \frac{(x+y)}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 36, -x \le y \le x\}$. $\left[\frac{35}{4}\pi\right]$

9. Vypočtěte
$$\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže uzavřená oblast M je ohraničena křivkou $x^2+y^2 = x+y$. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

10. Vypočtěte
$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{-\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
jestliže uzavřená oblast M je ohraničena trojúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$.
$\left[\frac{1}{4}(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}})\right]$

11. Vypočtěte míru množiny $M \subset E^2$, ohraničené křivkami
$y = 0$, $x^2+y^2 = 1$, $y = x$, $x = 2$. $\left[2 - \frac{\pi}{8}\right]$

12. Uvažujte množinu M z předchozí úlohy a vypočtěte
$$\iint\limits_M \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$
$\left[2\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}\right]$

13. Vypočtěte míru množiny $M \subset E^2$, ohraničené srdcovkou (kardoidou)
$$r(\varphi) = 1 + \cos\varphi\,, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$
$\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

14. Vypočtěte míru množiny $M \subset E^2$, ohraničené lemniskatou
$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$
$[2a^2]$

15. Dvojným nebo trojným integrálem vypočtěte objem tělesa, které je ohraničeno plochami $z = 16(x^2+y^2) - 64\,, \quad z = 0.$ $[128\pi]$

Z toho, co člověk zná, nelze usuzovat, kolik nezná.

TROJNÝ INTEGRÁL

♣ **Teoretický základ:** trojný integrál, Fubiniho věta, sférické, eliptické a válcové souřadnice

1. Vypočtěte
$$\iiint\limits_M \left(x^2y - \frac{z}{y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
jestliže $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle \times \langle 0,2\rangle$. $[1 - 2\ln 2]$

2. Vypočtěte objem elementárního čtyřstěnu (tj. čtyřstěnu o vrcholech $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$). $\left[\frac{1}{6}\right]$

3. Vypočtěte míru množiny M ohraničené rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x + y$, ležící v prvním oktantu. $\left[\frac{1}{3}\right]$

4. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou $z = 4 - x^2 - y^2$ a rovinou $z = 0$. $[8\pi]$

5. Vypočtěte
$$\iiint\limits_M \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
jestliže $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1, z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$. $\left[\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} - 1)\right]$

6. Vypočtěte
$$\iiint\limits_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
jestliže $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \ge 0, y \ge 0, \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2\}$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

7. Vypočtěte
$$\iiint\limits_M z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
jestliže $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 6\}$. $[324\pi]$

8. Vypočtěte míru množiny M ležící v prvním oktantu, ohraničené podmínkami
$$y^2 + z^2 = 16,\ 3y - 2x = 0,\ x = 0,\ z = 0.$$ $[32]$

9. Vypočtěte střední hodnotu funkce
$$f(x,y,z) = x$$
na elementárním čtyřstěnu o vrcholech $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

10. Vypočtěte
$$\iiint\limits_D (x^2+y^2)z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
kde $D \subset \mathbb{R}^3$ je válec o poloměru podstavy $r=2$ a výšce $v=5$, osa válce je totožná s osou z, podstava válce leží v rovině $z=0$, $z \geq 0$. $[100\pi]$

11. Vypočtěte
$$\iiint\limits_D (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
kde množina $D \subset \mathbb{R}^3$ je omezená plochami $x^2+y^2=2z$, $z=2$. $\left[\frac{16}{3}\pi\right]$

12. Vypočtěte míru množiny $M \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq r^2,\quad x \geq 0,\quad 0 \leq z \leq \frac{v}{r}x\right\}\,,\qquad r,v>0\,.$$
$\left[\frac{2}{3}vr^2\right]$

13. Vypočtěte míru množiny $M \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 2az,\quad z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}\,,\qquad a>0\,.$$
$[\pi a^3]$

14. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochou
$$\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^2 = ax\,,\qquad a,b,c>0\,.$$
$\left[\frac{1}{3}\pi a^3bc\right]$

15. Vypočtěte
$$\iiint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
kde množina $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 25,\quad x^2+y^2 \geq 16\}$. Výsledek ověřte pomocí vztahů pro výpočet objemu koule, válce a kulového vrchlíku (rozmyslete si, jak množina D vypadá). $[36\pi]$

16. Vypočtěte
$$\iiint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
kde množina $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 25,\quad x^2+y^2 \leq 9\}$. Výsledek ověřte pomocí vztahů pro výpočet objemu koule, válce a kulového vrchlíku (rozmyslete si, jak množina D vypadá).
$$\left[\frac{244}{3}\pi\right]$$

„Pověz mi a zapomenu; ukaž mi a já si vzpomenu;
ale nech mne se zúčastnit a já pochopím.“
Konfucius

Aplikace dvojného a trojného integrálu

♡ Hmotnost m tělesa o objemu V a hustotě $\varrho(x,y,z)$:

$$m = \iiint\limits_V \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

♡ Souřadnice těžiště 2dim desky D:

$$x_T = \frac{\iint\limits_D x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,, \quad y_T = \frac{\iint\limits_D y\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

♡ Moment setrvačnosti 2dim desky D vzhledem k souřadnicovým osám x, y:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

♡ Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose z:

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

1. Najděte souřadnice těžiště homogenní desky omezené křivkami

$$ay = x^2\,, \quad x+y = 2a\,, \quad (a>0)\,.$$

$$\left[x_T = -\frac{1}{2}a;\quad y_T = \frac{8}{5}a\right]$$

2. Najděte souřadnice těžiště homogenní desky omezené osou x a polovinou kardoidy

$$r = a(1+\cos\varphi)\,, a>0\,, \varphi \in \langle 0,\pi\rangle\,.$$

$$\left[x_T = \frac{5}{6}a;\quad y_T = \frac{16}{9\pi}a\right]$$

3. Vypočtěte objem koule o poloměru R

   a) pomocí vztahu pro objem rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce jedné proměnné kolem osy x,

b) pomocí dvojného integrálu,

c) pomocí trojného integrálu.

4. Vypočtěte souřadnice hmotného středu homogenní polokruhové desky o poloměru R a středu v počátku soustavy souřadné. $\left[x_T = 0;\quad y_T = \dfrac{4R}{3\pi}\right]$

5. Vypočtěte hmotnost polokoule o poloměru R se středem v počátku, ležící v polorovině $z \geq 0$, je-li její hustota $\varrho(x,y,z) = x^2 + y^2$. $\left[\dfrac{4}{15}\pi R^5\right]$

6. Určete souřadnice těžiště homogenního tělesa ve tvaru poloviny rotačního elipsoidu
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\,, \qquad z \geq 0\,.$$
$\left[x_T = 0;\quad y_T = 0;\quad z_T = \dfrac{3}{8}c\right]$

7. Najděte souřadnice těžiště homogenní desky omezené osou x a částí cykloidy
$$x(t) = a(t - \sin t)\,, y(t) = a(1 - \cos t)\,, \quad a > 0\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$
$\left[x_T = \pi a;\quad y_T = \frac{5}{6}a\right]$

8. Rozložení tlaku p na ploše
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$$
je dáno vztahem
$$p = p_0\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)\,.$$
Vypočtěte střední hodnotu tlaku působícího na tuto plochu. $\left[\frac{1}{2}p_0\right]$

9. Vypočtěte momenty setrvačnosti I_x, I_y vzhledem k souřadnicovým osám x, y homogenní oblasti ohraničené kardoidou
$$r = a(1 + \cos\varphi)\,, a > 0\,, \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$
$\left[I_x = \dfrac{21}{32}\pi a^4;\quad I_y = \dfrac{49}{32}\pi a^4\right]$

10. Určete moment setrvačnosti homogenní koule hmotnosti m o poloměru R a středu $[0,0,0]$ vzhledem k ose z. $\left[\frac{2}{5}mR^2\right]$

„Neučíme se pro školu, ale pro život.“
Seneca

Křivkový integrál ze skalárního pole

1. Odvoďte vzorec pro výpočet délky křivky zadané v polárních souřadnicích rovnicí $r = r(\varphi)\,,\ \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$. $\left[L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, \mathrm{d}\varphi\right]$

2. Najděte parametrické vyjádření křivky zadané rovnicí
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1\,.$$
Vypočtěte délku této křivky. [astroida, 6]

3. Vypočtěte délku srdcovky popsané rovnicí
$$r = r(\varphi) = 1 + \cos\varphi\,,\quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle\,.$$
[8]

4. Vypočtěte délku cykloidy C:
$$x(t) = a(t - \sin t)\,,\ y(t) = a(1 - \cos t)\,,\quad a > 0\,,\quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,.$$
[$8a$]

5. Vypočtěte délku křivky dané parametricky:
$$x(t) = \frac{-2t}{1+t^2}\,,\quad y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\ t \in \langle -1, 1 \rangle\,.$$
[π]

6. Vypočtěte hmotnost drátu ohnutého do tvaru čtvrtiny astroidy
$$x(t) = \cos^3 t\,,\ y(t) = \sin^3 t\,,\quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$
o hustotě $\varrho(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. $\left[\frac{3}{16}\pi\right]$

7. Vypočtěte délku jednoho závitu Archimédovy spirály
$$r = r(\varphi) = a\varphi, a > 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle\,.$$
$\left[\frac{1}{2}a\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right)\right]$

8. Vypočtěte
$$\int_C (x^2 + y)\, ds\,,$$
kde C je úsečka AB, kde $A = [0, 2]$ a $B = [2, 4]$. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 13\right]$

9. Vypočtěte
$$\int\limits_C \sqrt{2y}\, ds\,,$$
kde C je úsek cykloidy $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$[4\pi a\sqrt{a}]$

10. Vypočtěte
$$\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds\,,$$
kde C je úsek šroubovice $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $z(t) = bt$, $a, b \in \mathbb{R}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$\left[\sqrt{a^2 + b^2}(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2)\right]$

11. Vypočtěte
$$\int\limits_C (x + y)\, ds\,,$$
kde C je obvod trojúhelníku ABC, $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [0, 1]$. $\left[1 + \sqrt{2}\right]$

12. Vypočtěte
$$\int\limits_C (x + y)\, ds\,,$$
kde C je obvod poloviny kruhu, který má střed v bodě $S = [0, 0]$, poloměr $r = 4$ a leží v polorovině $x + y \geq 0$. $\left[32\sqrt{2}\right]$

13. Vypočtěte
$$\int\limits_C z\, ds\,,$$
kde C je křivka $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. $\left[\frac{2}{3}\sqrt{2}\left((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\right]$

14. Vypočtěte
$$\int\limits_C z\, ds\,,$$
kde C je část křivky $x = t^2 - 4$, $y = 2 + 2t$, $z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$, mezi jejími průsečíky s rovinami $y = 0$, $z = 0$. $\left[\frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})\right]$

15. Vypočtěte
$$\int\limits_C (3x + z)\, ds\,,$$
kde C je úsečka AB, $A = [4, 1, 3]$, $B = [2, 3, 3]$. $\left[24\sqrt{2}\right]$

„Nestačí vědět, vědění se musí použít.“
Goethe

Křivkový integrál ze skalárního a vektorového pole

1. Vypočtěte
$$\int_C (x+y+z)\, ds\,,$$
kde křivka C je dána parametrickými rovnicemi:
$x(t) = 4\sin t$, $y(t) = \sin t - 3\cos t$, $z(t) = \sin t + 3\cos t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. $[12\sqrt{18}]$

2. Vypočtěte hmotnost oblouku ve tvaru křivky $y = \ln x$, $x \in \langle x_1, x_2\rangle$, $0 < x_1 < x_2$, je-li lineární hustota v libovolném bodě křivky číselně rovna čtverci vzdálenosti tohoto bodu od osy y. $\left[\frac{1}{3}\left((1+x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right]$

3. Vypočtěte
$$\int_C (y+z)\, ds\,,$$
kde křivka C je tvořena obloukem křivky $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, $t \in \langle -\pi, \pi\rangle$ a úsečkou, která spojuje koncové body tohoto oblouku. $[-2\pi]$

4. Vypočtěte
$$\int_C y\, ds\,,$$
kde C je obvod parabolické úseče $-1 \le x \le -y^2$. $[0]$

5. Vypočtěte
$$\int_C \sin 2x\, ds\,,$$
kde C je obloukem grafu funkce $f(x) = \cos x$ na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. $\left[\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\right]$

6. Vypočtěte
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\, ds\,,$$
kde křivka C je kružnice o rovnici $(x-1)^2 + y^2 = 1$. $[8]$

7. Vypočtěte
$$\int_C z\, ds\,,$$
kde křivka $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, x \ge 0, z \ge 0, y = 0\}$. $[1]$

8. Vypočtěte

$$\int\limits_C xy\,ds\,,$$

kde křivka $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. $\left[\frac{13}{4}\right]$

9. Vypočtěte

$$\int\limits_C \left(2x\mathrm{e}^{x^2+2y}\,dx\; + 2\mathrm{e}^{x^2+2y}\,dy\right),$$

kde křivka C je čtvrtkružnice $x^2+y^2 = 8$ z bodu $A = [2,-2]$ do bodu $B = [-2,-2]$. Křivku C načrtněte. $[0]$

10. Vypočtěte délku křivky C: $x(t) = \sin 4t$, $y(t) = \cos 4t$, $z(t) = -3t$, $t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. $[5\pi]$

11. Vypočtěte

$$\int\limits_C (2xy+2)\,dx\; + (x^2+4y)\,dy,$$

kde křivka C je část elipsy $9x^2+4y^2 = 36$ mezi body $A = [0,3]$ a $B = [2,0]$. Křivku C načrtněte. $[-14]$

12. Vypočtěte

$$\int\limits_C y\,ds,$$

kde křivka C je obvodem kruhové úseče $x^2+y^2 \leq 2$, $y \geq x + \sqrt{2}$. $\left[2+\sqrt{2}\right]$

13. Vypočtěte

$$\int_C y^2\,ds\,,$$

kde C je obvod půlkruhu se středem v počátku, poloměrem $r = 2$, který leží v polorovině $x \leq 0$. Pozn. Obvod půlkruhu je půlkružnice a úsečka. $\left[4\pi + \frac{16}{3}\right]$

14. Vypočtěte

$$\int\limits_C \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x+y},$$

kde křivka C je obvodem čtverce ABCD, kde $A = [1,0]$, $B = [0,1]$, $C = [-1,0]$. Uvažujte křivku orientovanou v kladném smyslu. $[-4]$

„Vzdělání má hořké kořeny,
ale sladké ovoce.“
Démokritos

Potenciál vektorového pole

1. Najděte potenciál vektorového pole $\vec{F}$:

   a) $\vec{F}(x,y) = \left(2x\mathrm{e}^{x^2+2y}, 2\mathrm{e}^{x^2+2y}\right)$ $\left[U(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+2y} + C\right]$

   b) $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{2x(1-\mathrm{e}^y)}{(1+x^2)^2}, \dfrac{\mathrm{e}^y}{1+x^2}\right)$ $\left[U(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^y - 1}{1+x^2} + C\right]$

   c) $\vec{F}(x,y) = (\mathrm{e}^{-x}\sin y, -\mathrm{e}^{-x}\cos y)$ $[U(x,y) = -\mathrm{e}^{-x}\sin y + C]$

   d) $\vec{F}(x,y,z) = (x, -(y+z), y)$ [pole nemá poteciál]

   e) $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2+y^2)$ $\left[U(x,y) = x^2y + \dfrac{1}{3}y^3 + C\right]$

   f) $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{y+2x+2x^3y^2}{1+x^2y^2}, \dfrac{x}{1+x^2y^2}\right)$ $[U(x,y) = \operatorname{arctg}(xy) + x^2 + C]$

   g) $\vec{F}(x,y) = \left(2x\cos y, \sin y\left(\dfrac{2}{\cos^3 y} - x^2\right)\right)$ $[U(x,y) = x^2\cos y + \operatorname{tg}^2 y + C]$

   h) $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x-2y}{(y-x)^2} + x, \dfrac{y}{(y-x)^2} - y^2\right)$

   $$\left[U(x,y) = \ln|y-x| + \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{x}{y-x} + C\right]$$

2. Ověřte, že diferenciální forma

   $$\left(\arccos y + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2\sqrt{y+\frac{1}{2}}} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\right)\mathrm{d}y$$

   je totálním diferenciálem nějaké funkce $f(x,y)$ na oblasti G. Určete tuto oblast a funkci $f(x,y)$ tak, aby platilo $f(1,\frac{1}{2}) = 0$.

   $$\left[\begin{array}{l} G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \wedge -\frac{1}{2} < y < 1\}; \\ f(x,y) = x\arccos y - \frac{1}{x} + \sqrt{y+\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{3} \end{array}\right]$$

3. Ověřte, že dané vektorové pole je potenciální a vypočtěte křivkový integrál

$$\int_C (3y^2 - x)\,dx + (6xy - y^2)\,dy\,,$$

kde C je část paraboly $y^2 = x$ probíhaná od bodu $A = [4, -2]$ do bodu $B = [0, 0]$. $\left[-\frac{128}{3}\right]$

4. Ověřte, že funkce $U(x, y) = x\mathrm{e}^{x+y}$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, je potenciálem vektorového pole

$$(\mathrm{e}^{x+y}(x + 1), x\mathrm{e}^{x+y})$$

a vypočtěte křivkový integrál

$$\int_C (x + 1)\mathrm{e}^{x+y}\,dx + x\mathrm{e}^{x+y}\,dy\,,$$

kde C je část paraboly $y = (x - 1)^2$ mezi body $A = [1, 0]$ a $B = [0, 1]$, probíhaná od bodu A do bodu B. Křivku C nakreslete. $[-\mathrm{e}]$

5. Ověřte, že vektorové pole $(2xy, x^2)$ je potenciální a vypočtěte křivkový integrál

$$\int_C 2xy\,dx + x^2\,dy\,,$$

kde C je část elipsy $9x^2 + 4y^2 = 36$ mezi body $A = [0, 3]$ a $B = [2, 0]$, probíhaná od bodu A do bodu B. $[0]$

6. Ověřte, že diferenciální forma

$$\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\,dx - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\,dy$$

je totálním diferenciálem funkce $f(x, y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$, $\quad y > 0, \quad -y < x < y \quad$ a vypočtěte

$$\int_C \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\,dx - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\,dy\,,$$

kde C je část paraboly $y = 3 - x^2$ probíhaná od bodu $A = [1, y_A]$ do bodu $B = [-1, y_B]$. Křivku C nakreslete. $\left[-\frac{\pi}{3}\right]$

„Tak, jak je snadné derivování,
tak nesnadné je integrování.“
J. Bernoulli

POTENCIÁL, ROVNICE VE TVARU TOTÁLNÍHO DIFERENCIÁLU

1. Určete reálná čísla a, b tak, aby vektorové pole

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{ay}{x} - \frac{2x}{y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ln x - \frac{bx^2+y}{y^3}\right)$$

bylo potenciální. Vypočtěte pro tento případ potenciál daného pole.

$$\left[a = 1, b = -2;\ U(x,y) = y\ln x - \frac{x^2}{y^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{y} + C\right]$$

2. Řešte následující diferenciální rovnice. Je-li to nutné, použijte metodu integračního faktoru:

a) $(x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - x^2)\,\mathrm{d}y = 0$ $\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2y + \frac{1}{3}y^3 = C, C \in \mathbb{R}\right]$

b) $\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y + (1 - y\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = 0$ $[x + y\mathrm{e}^{-x} = C, C \in \mathbb{R}]$

c) $\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$ $\left[y\ln x + \frac{1}{4}y^4 = C, C \in \mathbb{R}\right]$

d) $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,\mathrm{d}x - \sqrt{x^2 - y}\,\mathrm{d}y = 0$ $\left[x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 - y)^3} = C, C \in \mathbb{R}\right]$

e) $(x^2 + y + x)\,\mathrm{d}x + (2yx^2 - x)\,\mathrm{d}y = 0$ $\left[x - \frac{y}{x} + \ln|x| + y^2 = C, C \in \mathbb{R}\right]$

f) $(xy^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ $\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C, C \in \mathbb{R}\right]$

g) $(1 - y^2)\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = 0$ $[y^2 - 1 = Cx^2, C \in \mathbb{R}]$

h) $(1 + y^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ $\left[x\mathrm{e}^{-\operatorname{arctg} y} = C, C \in \mathbb{R}\right]$

i) $(\sin x + \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + \cos x\,\mathrm{d}y = 0$ $[x - \mathrm{e}^{-y}\cos x = C, C \in \mathbb{R}]$

j) $(x \sin y + y)\,\mathrm{d}x + (x^2 \cos y + x \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$ $\qquad [x \sin y + y \ln x = C, C \in \mathbb{R}]$

k) $2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$ $\qquad \left[x^2 y - \frac{1}{3}y^3 = C, C \in \mathbb{R}\right]$

l) $(2 - 9xy^2)x\,\mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3)y\,\mathrm{d}y = 0$ $\qquad [x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C, C \in \mathbb{R}]$

m) $(y + x^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ $\qquad \left[x - \frac{y}{x} = C, C \in \mathbb{R}\right]$

n) $(y + \mathrm{e}^x)y' + \frac{1}{2}y^2 + 2y\mathrm{e}^x = 0$ $\qquad \left[\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^x + y\mathrm{e}^{2x} = C, C \in \mathbb{R}\right]$

3. Při rovinném proudění je tvar proudnic určen diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y)} - \frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y)} = 0\,.$$

Určete tvar proudnic, jestliže pro složky rychlostí platí $v_x = 2ax$, $v_y = -2ay$, kde a je konstanta. $\qquad [xy = K, K \in \mathbb{R}]$

4. Řešte danou diferenciální rovnici

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$$

s počáteční podmínkou $y(2) = 1$. $\qquad \left[x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = 10\right]$

5. Řešte danou diferenciální rovnici

$$\left(x^4 + \frac{\mathrm{e}^{4x}}{y^4}\right) + \left(4y \sin y^2 - \frac{\mathrm{e}^{4x}}{y^5}\right) y' = 0$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. $\qquad \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{4x}}{y^4} - 2\cos y^2 = \frac{1}{4} - 2\cos 1\right]$

„Inteligence není choroba nakažlivá.“
O. Wilde

POTENCIÁL VEKTOROVÉHO POLE TŘÍ PROMĚNNÝCH

1. Ověřte, že diferenciální forma

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{y}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x + \left(\operatorname{arccotg} x - \frac{1}{y^2}\right)\,\mathrm{d}y + \,\mathrm{d}z$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce $f(x,y,z)$ na oblasti G. Určete tuto oblast a funkci $f(x,y,z)$ tak, aby platilo $f(1,-1,0) = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\left[\begin{array}{l} G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0, y < 0, z \in \mathbb{R}\} \\ f(x,y,z) = y \operatorname{arccotg} x + \sqrt{x} + \frac{1}{y} + z + \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

2. Určete definiční obor vektorového pole

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x \ln z - 2\sqrt{y}, -\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{3}{2}y^2 \ln z, \frac{x^2+y^3}{2z}\right)$$

a zjistěte, zda je potenciální. V kladném případě najděte příslušný potenciál.

$$\left[\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}\,,\ y > 0\,,\ z > 0 \\ U(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2}\ln z - 2x\sqrt{y} + \dfrac{1}{2}y^3 \ln z + C\,, C \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

3. Určete definiční obor vektorového pole

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\ln z}{\sqrt{x}} - \frac{1}{y}, \frac{x}{y^2} + 2y\sqrt{z}, \frac{2\sqrt{x}}{z} + \frac{y^2}{2\sqrt{z}}\right)$$

a zjistěte, zda je potenciální. V kladném případě najděte příslušný potenciál.

$$\left[\begin{array}{l} x > 0\,,\ y \neq 0\,,\ z > 0 \\ U(x,y,z) = 2\sqrt{x}\ln z - \dfrac{x}{y} + y^2\sqrt{z} + C\,, C \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

4. Určete definiční obor vektorového pole

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

a zjistěte, zda je potenciální. V kladném případě najděte příslušný potenciál.

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ U(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2} + C\,, C \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

5. Zjistěte, zda diferenciální forma

$$\left(y^2 + 2xz^2 - 1\right)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y + \left(2x^2z + z^3\right)\,\mathrm{d}z$$

je totálním diferenciálem. Pokud ano, vypočtěte potenciál $U(x, y, z)$.

$$\left[U(x, y, z) = xy^2 + x^2z^2 - x + \frac{1}{4}z^4 + C\,, C \in \mathbb{R}\right]$$

6. Ověřte, že vektorového pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{z}{x^2y} - \frac{z}{x^2 + z^2}\,, \frac{z}{xy^2}\,, \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy}\right)$$

je potenciální v oblasti

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0\}\,.$$

Najděte jeho potenciál U.

$$\left[U(x, y, z) = -\frac{z}{xy} - \operatorname{arctg}\frac{x}{z} + C\,, C \in \mathbb{R}\right]$$

7. Určete rotaci vektorového pole

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\,\vec{r}\,,$$

kde $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r} \neq \vec{o}$. $\left[\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{o}\right]$

8. Ověřte, že pro silové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + 2xz^2 - 1, 2xy, 2x^2z + z^3)$$

platí identita

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\ \vec{F}) - \triangle\vec{F}\,.$$

$$\left[\begin{array}{ll}\text{Nápověda:} & \operatorname{div}\ \vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} \\ & \operatorname{grad} F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \\ & \operatorname{rot}\vec{F} = \left(\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z}, \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x}, \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right) \\ & \triangle F_x = \left(\dfrac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right)\end{array}\right]$$

„Pokud neděláš chyby, nepracuješ na dostatečně těžkých problémech. A to je velká chyba.“
F. Wikzek

OPAKOVÁNÍ – KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

1. Vypočtěte
$$\int_C \mathrm{d}s\,,$$
kde křivka C je grafem funkce $y = f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $|x| \le 1$. [4]

2. Vypočtěte
$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y\,,$$
kde křivka $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 4\}$ (orientaci křivky volte v kladném smyslu otáčení). $[-8\pi]$

3. Vypočtěte
$$\int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z\,,$$
kde křivka C je kladně orientovanou hranicí oblasti
$O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+2y+6z = 6\,, x>0, y>0, z>0\}$. $[-6]$

4. Vypočtěte
$$\int_C \frac{\mathrm{d}s}{x+y-1}\,,$$
kde křivka C je úsečka AB, kde $A = [1,2]$, $B = [3,4]$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3\right]$

5. Vypočtěte
$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z\,,$$
kde $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4\,,\ x = y\,, z \ge 0\}$. $\left[\pm\frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ (dle orientace)}\right]$

6. Vypočtěte
$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\,,$$
kde $\vec{F} = (x-z, 1-xy, y)$ a křivka C je daná parametrickými rovnicemi $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \langle 0,1\rangle$, orientovaná souhlasně s rostoucím parametrem. $\left[\frac{29}{20}\right]$

7. Vypočtěte

$$\int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}x\,,$$

kde C je uzavřená křivka tvořená obloukem paraboly $y = x^2$ a úsečkou $y = x$, $x \in \langle 0, 1\rangle$, obíhaná v záporném smyslu. $\left[1 - \frac{\pi}{4}\right]$

8. Vypočtěte

$$\int_\varphi 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\mathrm{d}y\,,$$

kde křivka φ je grafem funkce $y = -\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$ (orientaci křivky volte ve směru rostoucího x). $\left[-\frac{4}{3}\right]$

9. Vypočtěte

$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

kde $\vec{F} = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ a křivka C je tvořená obloukem paraboly $y = x^2$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ (orientaci křivky volte ve směru rostoucího x). $\left[-\frac{14}{15}\right]$

10. Vypočtěte

$$\int_C y\,\mathrm{d}s\ ,$$

kde C je část křivky dané parametrickými rovnicemi $x = t^2$, $y = t$, $z = t + 1$, $t \in \mathbb{R}$, mezi jejími průsečíky s rovinami $x = 0$, $z = 0$. $\left[\frac{1}{12}(2\sqrt{2} - 6\sqrt{6})\right]$

11. Ověřte, že diferenciální forma

$$\left(\frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{2x}{1 + x^4}\right)\mathrm{d}x + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce $f(x, y)$ na oblasti G. Určete tuto oblast a funkci $f(x, y)$ tak, aby platilo $f(1, -1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\left[\begin{array}{l} G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y < 0\}; \\ f(x, y) = y\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x^2 - \ln|y| + 1 \end{array}\right]$$

12. Určete definiční obor vektorového pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2x, -z, \frac{1}{z} - y\right)$$

a zjistěte, zda je potenciální. Vypočtěte $\int_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, kde C je křivka daná parametrickými rovnicemi $x = t^2 - 1$, $y = 1 - t^2$, $z = 2 - t$, $t \in \langle -1, 1\rangle$, probíhaná ve směru rostoucí souřadnice z. $[\ln 3]$

„To nejlepší na konec .... “

Plošný integrál

1. Vypočtěte povrch anuloidu popsaného parametricky

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos v)\cos u \\ y &= (a + b\cos v)\sin u \\ z &= b\sin v\,, \qquad u \in (0, 2\pi), v \in (0, 2\pi)\,. \end{aligned}$$

[$4\pi^2 ab$]

2. Vypočtěte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} xy\,\mathrm{d}S\,,$$

kde $\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 4, 0 \le z \le 3, x \ge 0, y \ge 0\}$. [12]

3. Vypočtěte plošný obsah vrchlíku rotačního paraboloidu

$$z = 6 - x^2 - y^2$$

nad rovinou $z = 0$. [$\frac{62}{3}\pi$]

4. Vypočtěte povrch poloviny kulové sféry

$$\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0\}\,.$$

[8π]

5. Vypočtěte povrch části zeměkoule ($R \doteq 6380$ km) ohraničený poledníky 0° a 30° v.d. a rovnoběžkami 45° a 60° s. š.

[$\frac{1}{12}\pi R^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$]

6. Vypočtěte plošný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{S} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$ a normála $\vec{n}$ míří ven. [2π]

7. Vypočtěte integrál

$$\int_{\mathcal{C}} xy^2\,\mathrm{d}y - x^2 y\,\mathrm{d}x\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ probíhaná v kladném smyslu. Výpočet proveďte

a) pomocí Greenovy věty,

b) bez použití Greenovy věty. $\left[\frac{1}{2}\pi a^4\right]$

8. Vypočtěte integrál

$$\int_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ probíhaná v kladném smyslu. Výpočet proveďte

a) pomocí Greenovy věty,

b) bez použití Greenovy věty. $[-2\pi ab]$

9. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_{\mathcal{S}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{S}$ představuje „vnější stranu sféry $x^2+y^2+z^2=R^2$.“ $[4\pi R^3]$

10. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{S}$ představuje „vnější stranu“ sféry

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2\,.$$

$\left[\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)\right]$

11. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_{\mathcal{S}} (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (z-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{S}$ představuje „vnější stranu“ kuželové plochy

$$x^2+y^2=z^2\,, \qquad 0 \le z \le h\,.$$

$[0]$

12. Vypočtěte plošný integrál 2. druhu

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde $\mathcal{S}$ představuje „vnější stranu“ elipsoidu

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\,.$$

$\left[4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]$