3.3. Průběh funkce

3.3.1. Vyšetřete průběh funkce, v inflexních bodech – pokud souřadnice bodu, v němž má funkce inflexi, je snadno vyjádřitelná – spočítejte obecnou rovnici tečny (grafy jsou na konci sekce):

a) $f(x) = (x+3)^2(x-3)$, b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$, c) $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^2+1}$,

d) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$, e) $g(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, f) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$,

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-a^2}$, $a > 0$, h) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, i) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$,

j) $f(x) = x^2e^{-x}$, k) $m(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$, l) $p(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$,

m) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$, n) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-a}$, $a \in R$, o) $f(x) = ax - \ln x$, $a > 0$,

p) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, q) $f(x) = 5x^2 \ln x$, r) $h(x) = \ln\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$, $a > 0$.

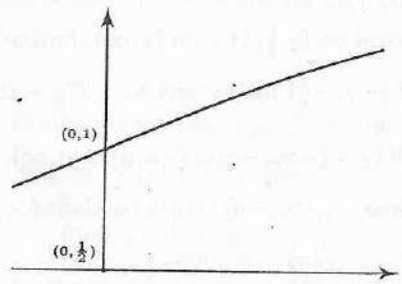
3.3.2. Použijte pouze první derivaci a načrtněte graf funkce $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$. Využijte periodicity funkce. V tištěném grafu odhadněte polohu inflexních bodů a jejich x-ových souřadnic. Potom tyto hodnoty spočtěte a výsledky porovnejte. (Graf je na konci sekce.)

3.3.3. Ukažte, že funkce f a g v úlohách 3.3.1.d a 3.3.1.e splňují $g(x) = f(-x)$ pro $x \in D(g)$. Odvoďte graf a vlastnosti funkce g z grafu a vlastností funkce f.

3.3.4. Ukažte, že funkce m a p v úlohách 3.3.1.k a 3.3.1.l splňují $p(x) = 1 - 2m(x)$ pro $x \in D(p)$. Odvoďte vlastnosti funkce p z vlastností funkce m.

3.3.5. Na obrázku je část grafu funkce

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+3}$$



pro hodnoty proměnné x vzaté z jistého (vám zatajeného) okolí bodu $x = 0$. Na ose x je vzdálenost bodu $x = 1$ od počátku X_m milimetrů a na ose y je vzdálenost bodu $y = 1$ od počátku Y_m milimetrů. Kolik je poměr X_m/Y_m, když víte, že je vyjádřitelný jako poměr dvou malých celých čísel?

Řešení.

3.3.1. a) $D(f) = (-\infty, \infty)$, funkce se rovná nule v bodech $x = -3$ a $x = 3$, je záporná na $(-\infty, -3) \cup (-3, 3)$, kladná na $(3, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$, funkce roste na $(-\infty, -3\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, klesá na $\langle -3, 1\rangle$, $f''(x) = 6(x+1)$, funkce je konkávní na $(-\infty, -1\rangle$, konvexní na $\langle -1, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -1$, rovnice tečny v inflexním bodě $(-1, -16)$ je $12x + y + 28 = 0$,

b) $D(f) = (-\infty, \infty)$, lichá funkce, funkce je záporná (resp. kladná) na $(-\infty, 0)$ (resp. $(0, \infty)$), $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$, roste na $\langle -1, 1\rangle$, $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$ konvexní na $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ a na $\langle \sqrt{3}, \infty)$, funkce má inflexi v bodech $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, tečny v příslušných inflexních bodech mají postupně tyto rovnice $x + 2y + 3\sqrt{3} = 0$, $y = 4x$, $x + 2y - 3\sqrt{3} = 0$,

c) $D(f) = (-\infty, \infty)$, nezáporná sudá funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 6$, $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2+1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$, roste na $\langle 0, \infty)$, $f''(x) = \dfrac{12(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle \frac{1}{3}\sqrt{3}, \infty)$, konvexní na $\langle -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$, funkce má inflexi v bodech $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ a $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, rovnice tečny v příslušných inflexních bodech jsou $9\sqrt{3}x + 4y + 3 = 0$ a $9\sqrt{3}x - 4y - 3 = 0$,

d) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = -1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$, funkce klesá na $(-\infty, -1\rangle$ a na $(1, \infty)$, roste na $\langle -1, 1)$, $f''(x) = \dfrac{8(x+2)}{(x-1)^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -2\rangle$, konvexní na $\langle -2, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -2$ a rovnice tečny v bodě $(-2, \frac{1}{9})$ má rovnici $4x + 27y + 5 = 0$,

e) $D(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x\to -1} g(x) = \infty$, $g'(x) = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$, funkce roste na $(-\infty, -1)$ a na $\langle 1, \infty)$, klesá na $(-1, 1\rangle$, $g''(x) = \dfrac{-8(x-2)}{(x+1)^4}$, funkce je konvexní na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, 2\rangle$, konkávní na $\langle 2, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = 2$ a rovnice tečny v inflexním bodě $(2, \frac{1}{9})$ má rovnici $4x - 27y - 5 = 0$,

f) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, funkce se rovná nule pouze pro $x = \frac{1}{2}$, je záporná v $(-\infty, \frac{1}{2})$, kladná v $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$, funkce klesá na $(-\infty, 0\rangle$ a na $(1, \infty)$, roste na $\langle 0, 1)$, minimum f je $f(0) = -1$, $f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{1}{2}, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -\frac{1}{2}$ a rovnice tečny v inflexním bodě $(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9})$ má rovnici $8x + 27y + 28 = 0$,

g) $D(f) = (-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, \infty)$, lichá funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, funkce je záporná v $(-\infty, -a) \cup (0, a)$ a kladná v $(-a, 0) \cup (a, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to -a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -a+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, přímka $y = x$ je asymptotou v obou nevlastních bodech $\pm\infty$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3a^2)}{(x^2-a^2)^2}$, funkce roste na $(-\infty, -\sqrt{3}a\rangle$ a na $\langle \sqrt{3}a, \infty)$, klesá na $\langle -\sqrt{3}a, -a)$, na $(-a, a)$ a na $(a, \sqrt{3}a\rangle$, $f(\sqrt{3}a) = -f(-\sqrt{3}a) = \frac{3}{2}\sqrt{3}a$, $f''(x) = \dfrac{2a^2x(x^2+3a^2)}{(x^2-a^2)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -a)$ a na $\langle 0, a)$, konvexní na $(-a, 0\rangle$ a na (a, ∞), funkce má inflexi v bodě $x = 0$ a tečnou v inflexním bodě $(0, 0)$ je osa x.

h) $D(f) = \langle 0, \infty)$, funkce se rovná nule pouze v bodech $x = 0$ a $x = 3$, je záporná na $(0, 3)$ a kladná na $(3, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, pro $x \in (0, \infty)$ je $f'(x) = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$, funkce klesá na $\langle 0, 1\rangle$, roste na $\langle 1, \infty)$, minimum je $f(1) = -2$, pro $x \in (0, \infty)$ je $f''(x) = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}$, funkce je konvexní na $\langle 0, \infty)$,

i) $D(f) = (-\infty, \infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 2$, je kladná na $(2, \infty)$ a záporná na $(-\infty, 2)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, funkce klesá na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, roste na $\langle -\frac{1}{2}, \infty)$, minimum je $f(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{5}$, $f''(x) = \dfrac{2-3x-4x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$, funkce má inflexi ve dvou bodech:

$x_1 = \frac{1}{8}(-3-\sqrt{41}) \doteq -1.2$, $x_2 = \frac{1}{8}(-3+\sqrt{41}) \doteq 0.4$, je konkávní na $(-\infty, x_1\rangle$ a na $\langle x_2, \infty)$ a konvexní na $\langle x_1, x_2\rangle$,

j) $D(f) = (-\infty, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a na $\langle 2, \infty)$, roste na $\langle 0, 2\rangle$, $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$, funkce má inflexi ve dvou bodech: $x_1 = (2-\sqrt{2}) \doteq 0.6$, $x_2 = (2+\sqrt{2}) \doteq 3.4$, je konvexní na $(-\infty, x_1\rangle$ a na $\langle x_2, \infty)$ a konkávní na $\langle x_1, x_2\rangle$,

k) $D(m) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, v žádném bodě není funkce rovna nule, funkce je kladná na $(-\infty, 0)$ – je ovšem hned vidět, že na tomto intervalu je větší než 1 –, funkce je záporná na $(0, \infty)$, $\lim_{x\to-\infty} m(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} m(x) = 0$, $\lim_{x\to0-} m(x) = \infty$, $\lim_{x\to0+} m(x) = -\infty$, $m'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$, funkce roste na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $m''(x) = \dfrac{-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^3} \equiv \dfrac{(1+e^x)e^x}{(1-e^x)^3}$, v žádném bodě funkce nemá inflexi, je konvexní na $(-\infty, 0)$ a konkávní na $(0, \infty)$, křivka $y = m(x)$ je středově symetrická vzhledem k bodu $(0, \frac{1}{2})$,

l) $D(p) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, lichá funkce, záporná na $(-\infty, 0)$, kladná na $(0, \infty)$ – je vidět, že v absolutní hodnotě jsou hodnoty funkce větší než 1 –, v žádném bodě definičního oboru není funkce rovna nule, $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm 1$, $\lim_{x\to0-} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0+} p(x) = \infty$, $p'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $p''(x) = \dfrac{2(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, 0)$, konvexní na $(0, \infty)$, funkce v žádném bodě nemá inflexi,

m) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, funkce kladná ve všech bodech definičního oboru, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e$, $\lim_{x\to0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0+} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-e^{\frac{x+1}{x}}}{x^2} \equiv \dfrac{-f(x)}{x^2}$, $\lim_{x\to0-} f'(x) = 0$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $f''(x) = \dfrac{(2x+1)e^{\frac{x+1}{x}}}{x^4} \equiv \dfrac{(2x+1)f(x)}{x^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a na $(0, \infty)$, funkce má inflexi bodě $x = -\frac{1}{2}$ a rovnice tečny v bodě $(-\frac{1}{2}, e^{-1}) \approx (-\frac{1}{2}, 0.4)$ je $4x + ey + 1 = 0$, poněvadž $f(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$, lze s funkcí zadanou pracovat jako s násobkem funkce h, $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$,

n) $D(f) = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$, funkce je záporná na $(-\infty, a)$, kladná na (a, ∞), v žádném bodě definičního oboru není funkce rovna nule, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{(x-a-1)e^x}{(x-a)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, a)$ a na $(a, a+1\rangle$, roste na $\langle a+1, \infty)$, $f(a+1) = e^{a+1}$, $f''(x) = \dfrac{((x-a-1)^2+1)e^x}{(x-a)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, a)$, konvexní na (a, ∞), funkce v žádném bodě nemá inflexi,

o) $D(f) = (0, \infty)$, $\lim_{x\to0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{ax-1}{x}$, funkce klesá na $(0, \frac{1}{a}\rangle$, roste na $\langle \frac{1}{a}, \infty)$, minimum funkce je $f(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$, funkce je konvexní na $(0, \infty)$, funkce v žádném bodě nemá inflexi,

p) $D(f) = (0, \infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 1$, je záporná na $(0,1)$ a kladná na $(1, \infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, funkce roste na $(0, \mathrm{e})$, klesá na $\langle \mathrm{e}, \infty)$, maximum funkce je $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \doteq 0.4$, $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$, funkce je konkávní na $(0, \mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$, konvexní na $\langle \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$, rovnice tečny v inflexním bodě $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}) \approx (4.5, 0.3)$ je $x + 2\mathrm{e}^3 y - 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} = 0$,

q) $D(f) = (0, \infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 1$, je záporná na $(0,1)$ a kladná na $(1, \infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f'(x) = 5x(2\ln x + 1)$, funkce klesá na $(0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) \approx (0, 0.6)$, roste na $\langle \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \infty)$, minimum funkce je $f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) = \dfrac{-5}{2\mathrm{e}} \doteq -0.9$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$, $f''(x) = 5(2\ln x + 3)$, funkce je konkávní na $(0, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$, konvexní na $\langle \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$, rovnice tečny v inflexním bodě $(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, -\frac{15}{2}\mathrm{e}^{-3}) \approx (0.2, 0.4)$ je $20\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}x + 2\mathrm{e}^3 y - 5 = 0$,

r) $D(h) = (-a, a)$, sudá a nekladná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to -a+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a-} h(x) = -\infty$, $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - a^2} \equiv \dfrac{-2x}{a^2 - x^2}$, funkce roste na $(-a, 0)$, klesá na $\langle 0, a)$, $h''(x) = \dfrac{-2(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2}$, funkce je konkávní na $(-a, a)$, v žádném bodě nemá inflexi.

3.3.2. Funkce $x \to 2\sin x + \cos 2x$ je definována pro všechna reálná čísla a je periodická s periodou 2π, proto stačí vyšetřit vlastnosti funkce na nějakém intervalu délky 2π. Zvolili jsme interval $\langle 0, 2\pi)$. Poněvadž $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x \equiv 2\cos x(1 - 2\sin x)$, je derivace je nulová pro tyto body z intervalu $\langle 0, 2\pi)$: $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$. Hodnoty funkce v těchto bodech jsou $f(\frac{1}{6}\pi) = f(\frac{5}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$, $f(\frac{3}{2}\pi) = -3$, funkce roste na $\langle 0, \frac{1}{6}\pi\rangle$, na $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\rangle$ a na $\langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi\rangle$, klesá na $\langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a na $\langle \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$. Pro začátek a konec grafu na $\langle 0, 2\pi)$ využijeme hodnoty $f'(0) = f'(2\pi) = 2$. Poněvadž $f''(x) = -2(\sin x + 2\cos 2x) \equiv 2(4\sin^2 x - \sin x - 2)$, body inflexe splňují $\sin x = \frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{33})$, odtud se získají tyto body inflexe z intervalu $\langle 0, 2\pi)$: $x_1 \doteq 1$, $x_2 \doteq 2.1$, $x_3 \doteq 3.8$, $x_4 \doteq 5.6$. Křivka $y = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in (-\infty, \infty)$, je symetrická vzhledem k osám představovaným přímkami $x = \frac{1}{2}\pi$ a $x = \frac{3}{2}\pi$.

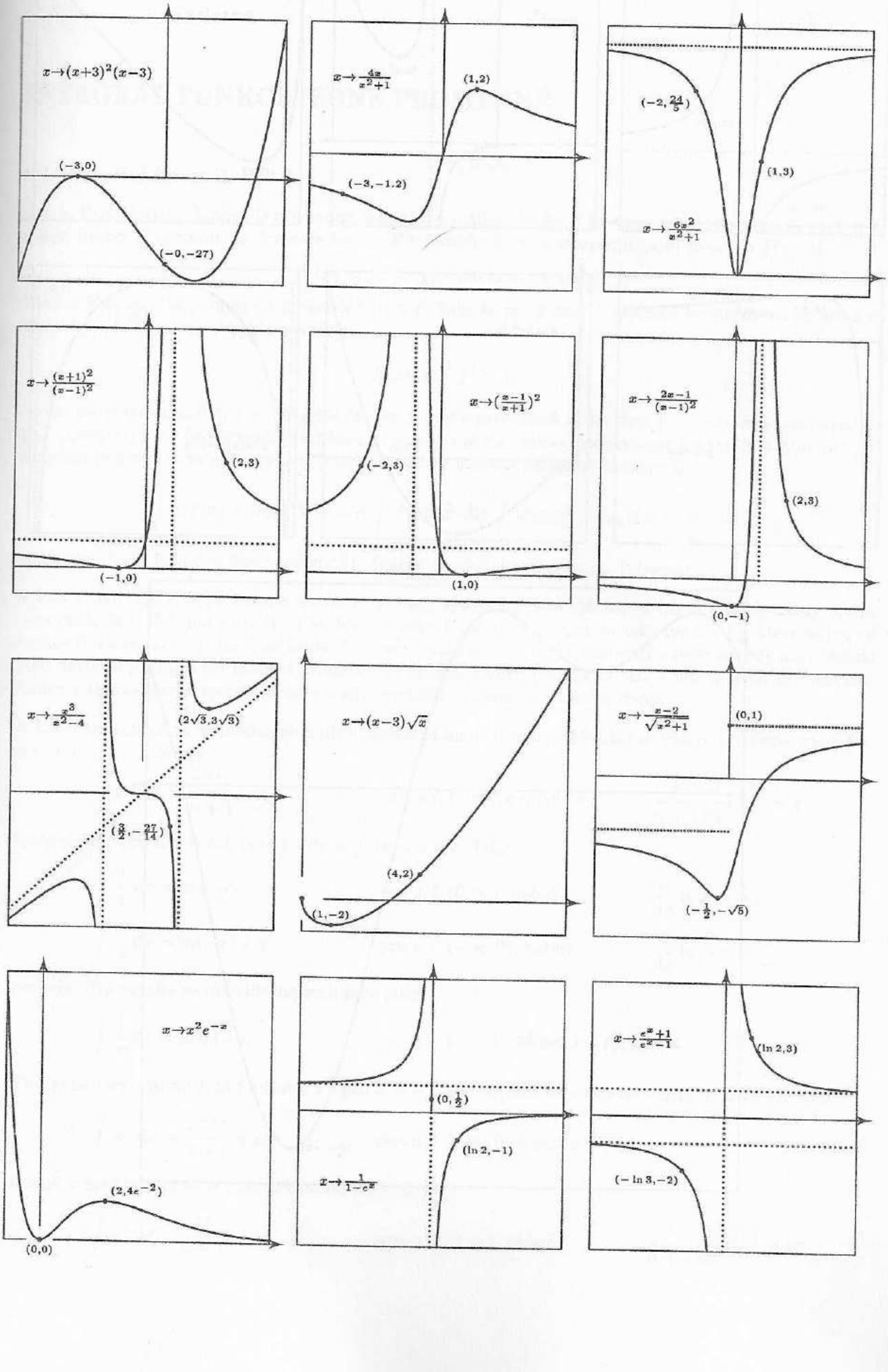
3.3.3. $g'(x) = -f'(-x)$, $g''(x) = f''(-x)$. **3.3.4.** $p'(x) = -2m'(x)$, $p''(x) = -2m''(x)$.

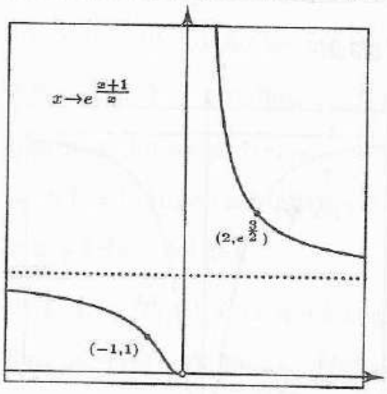
3.3.5. $\dfrac{X_m}{Y_m} = \dfrac{3}{2}$. Zjistíme, že $f'(0) = \frac{2}{3}$. Proto nakreslíme do obrázku tečnu v bodě $(0,1)$ a na tečně odměříme přírůstek Δy, který odpovídá přírůstku Δx. Poněvadž musí platit

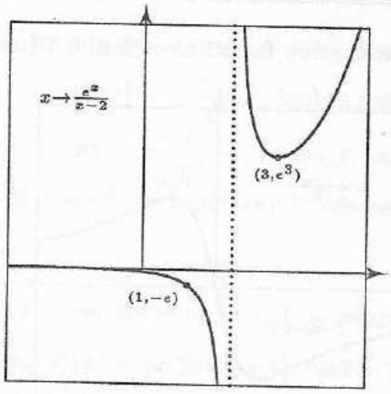
$$\frac{\Delta y}{Y_m} : \frac{\Delta x}{X_m} = \frac{2}{3},$$

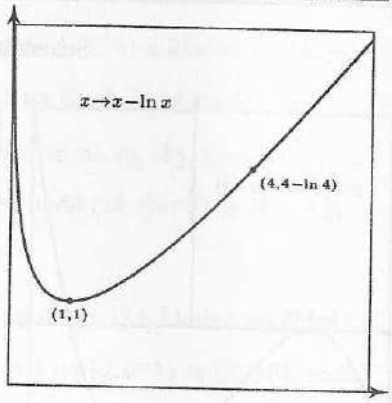
máme vztah pro výpočet X_m/Y_m.

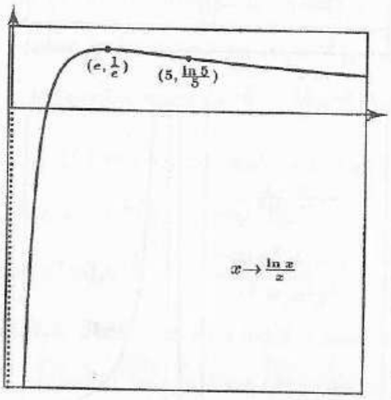
Schematické grafy funkcí ze cvičení 3.3.1. a 3.3.2.

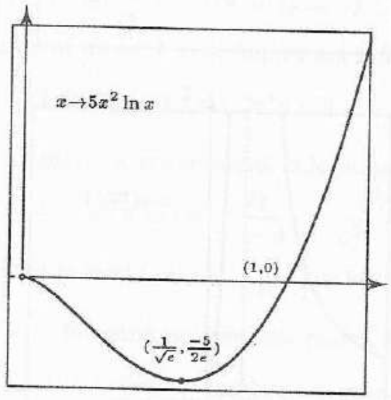


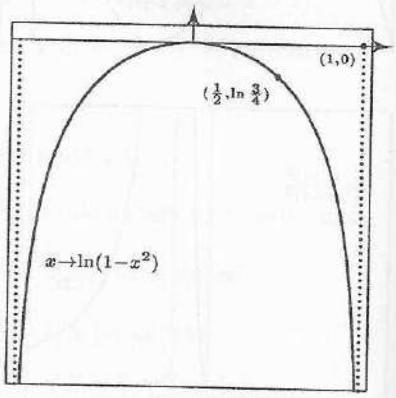

$x \to e^{\frac{x+1}{x}}$
$(2, e^{\frac{3}{2}})$
$(-1,1)$

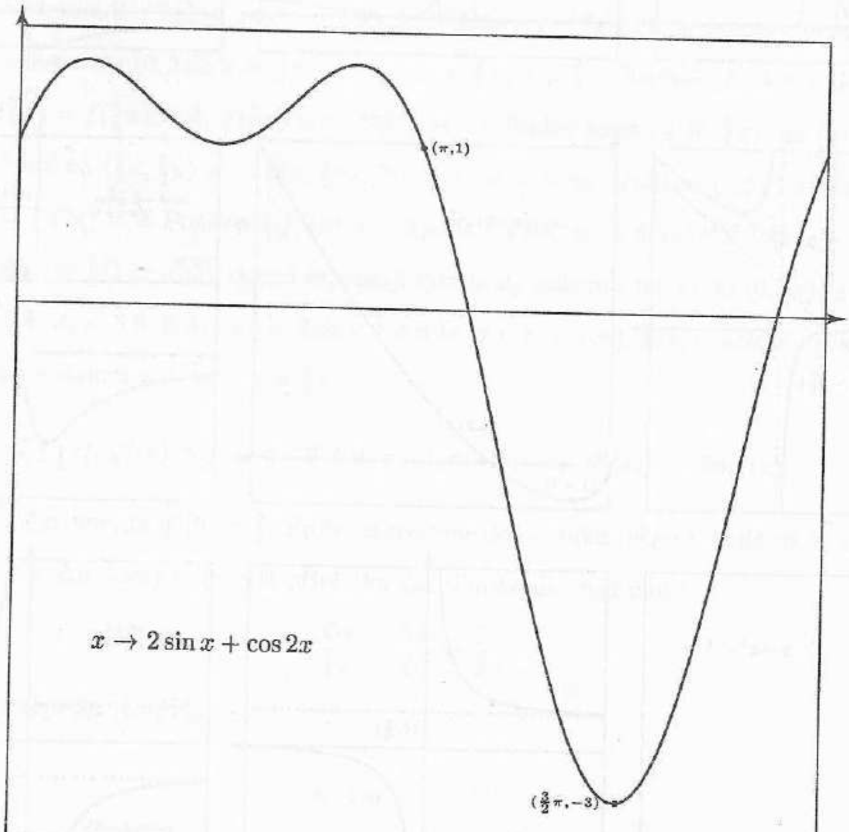

$x \to \frac{e^x}{x-2}$
$(3, e^3)$
$(1, -e)$


$x \to x - \ln x$
$(4, 4 - \ln 4)$
$(1,1)$


$(e, \frac{1}{e})$
$(5, \frac{\ln 5}{5})$
$x \to \frac{\ln x}{x}$


$x \to 5x^2 \ln x$
$(1,0)$
$(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-5}{2e})$


$(1,0)$
$(\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{4})$
$x \to \ln(1-x^2)$


$(\pi, 1)$
$x \to 2\sin x + \cos 2x$
$(\frac{3}{2}\pi, -3)$