Taylorův polynom

1) Určete Taylorův polynom 3. stupně v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \sin 2x$$

2) Určete Taylorův polynom 2. stupně v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

3) Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně vhodné funkce ve vhodném bodě aproximujte hodnoty

$$\ln 0,9$$
$$\sqrt{1,04}$$
$$e^{0,06}$$

4) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

v bodě *a)* $a = 0$, *b)* $a = 1$, *c)* $a = 2$.

Výsledky:

1)

$$\mathbf{T}^3_{f,0}(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$$

2)

$$\mathbf{T}^2_{f,0}(x) = 1 - x^2$$

3)

- Hodnotu $\ln 0,9$ můžeme aproximovat pomocí Taylorova polynomu funkce $\ln x$ v bodě $a = 1$:

$$\mathbf{T}^2_{\ln x,1}(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

$$\ln 0,9 \doteq -0,105$$

- Hodnotu $\sqrt{1,04}$ můžeme aproximovat pomocí Taylorova polynomu funkce $\sqrt{x}$ v bodě $a = 1$:

$$\mathbf{T}^2_{\sqrt{x},1}(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$\sqrt{1,04} \doteq 1,0198$$

- Hodnotu $e^{0,06}$ můžeme aproximovat pomocí Taylorova polynomu funkce e^x v bodě $a = 0$:

$$\mathbf{T}^2_{e^x,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$e^{0,06} \doteq 1,0618$$

4) Všimněme si, že v kterémkoliv bodě je Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x) = x^2 - 4x + 5$ stejný jako tato funkce, neboť ona sama je polynom 2. stupně.

a)

$$\mathbf{T}^2_{f,0}(x) = 5 - 4x + \frac{2}{2!}x^2$$

b)

$$\mathbf{T}^2_{f,1}(x) = 2 - 2(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2$$

c)

$$\mathbf{T}^2_{f,2}(x) = 1 + \frac{2}{2!}(x-2)^2$$