Střední hodnoty a rozptyly pro diskrétní rozdělení

1) Alternativní rozdělení: $X \sim \mathrm{Alt}(p)$

$$P[X=1] = p$$
$$P[X=0] = 1-p$$

$$EX = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p$$
$$\operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

2) Binomické rozdělení: $X \sim \mathrm{Bi}(n,p)$

přičemž $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $Y_i \sim \mathrm{Alt}(p)$ nezávislé

$$P[X=k] = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

linearita střední hodnoty

$$EX = E\Big(\sum_1^n Y_i\Big) = \sum_1^n (EY_i) = \underbrace{p+p+\dots+p}_{n\text{-krát}} = n\cdot p$$

nezávislost Y_i

$$\operatorname{var} X = \operatorname{var}\Big(\sum_1^n Y_i\Big) = \sum_1^n \operatorname{var} Y_i = n\cdot \operatorname{var} Y_i = n\cdot p(1-p)$$

3) Geometrické rozdělení: $X \sim \mathrm{Geom}(p)$

$$P[X=k] = (1-p)^{k-1}\cdot p, \quad k\in\mathbb{N}$$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p}\Big(-(1-p)^k\Big)\cdot p \overset{|x=p|}{=}$$

$$= p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-(1-x)^k\Big)' = p\cdot(-1)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1-x)^k\Big)' = -p\cdot\left(\frac{1-x}{1-(1-x)}\right)'$$

$$= -p\cdot\left(\frac{1-x}{x}\right)' = -p\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)' = -p\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \overset{x=p}{=} \frac{1}{p}$$

trik: počítejme rozptyl n.v. s geometrickým rozdělením

jako $\operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = E[X(X-1)+X] - (EX)^2$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p = p(1-p)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k(k-1)(1-p)^{k-2}}_{\left(-(1-p)^{k-1}\right)'}$$

$$\overset{x=p}{=} p(1-p)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\cdot(-1)\cdot(1-x)^{k-1}\right)' = p(p-1)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left((1-x)^{k}\right)''$$

$$= p(1-p)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-x)^{k}\right)'' = p(1-p)\cdot\left(\frac{1-x}{1-(1-x)}\right)'' =$$

$$= p(1-p)\cdot\left(\frac{1}{x}-1\right)'' = p\cdot(1-p)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = p(p-1)\cdot\frac{2}{x^3} =$$

$$\overset{x=p}{=} \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\operatorname{var} X = E(X(X-1)+X) - (EX)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

4) Poissonovo rozdělení $\quad X \sim Pois(\lambda)$

$$P[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{k} \cdot \frac{\lambda^1 \cdot \lambda^{k-1}}{\cancel{k} \cdot (k-1)!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = \lambda \underbrace{e^{-\lambda} e^{\lambda}}_{1} = \underline{\underline{\lambda}}$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot P[X=k] = \sum_{k=2}^{\infty} \cancel{k(k-1)} \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{\cancel{k(k-1)}(k-2)!}$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda^2 \cdot \underbrace{e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}}_{1} = \lambda^2$$

$$\operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = E[X(X-1) + X] - (EX)^2 =$$

$$= \underbrace{E(X(X-1))}_{\lambda^2} + \underbrace{EX}_{\lambda} - \underbrace{(EX)^2}_{\lambda^2} = \underline{\underline{\lambda}}$$

příklad: V testu je 10 otázek, na každou z nich jsou pouze 4 možné odpovědi a, b, c, d ; jen jedna je správná.
Zaveďte náhodnou veličinu udávající počet správně zodpovězených otázek v případě, že student náhodně tipuje odpovědi. Určete její střední hodnotu a rozptyl.

X ... počet správně zodpovězených otázek

$$P[X=10] = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$P[X=9] = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{9} \cdot \frac{3}{4}$$

neboť: označíme-li jev A_i ... na i-tou otázku student odpověděl špatně a na ostatní správně; kde $i \in \{1, \dots, 10\}$,

potom $P[X=9] = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_3) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i) =$

A_i jsou disjunktní jevy

$= P(A_1) + \dots + P(A_{10})$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{9} \cdot \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{9} \cdot \frac{3}{4}}_{10\text{-krát}} = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{9} \cdot \frac{3}{4}$$

$$P[X=8] = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2}$$

$\binom{10}{8}$ → kolika způsoby lze uhodnout 8 otázek z celkových 10

$\vdots$

$$P[X=k] = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}, \quad k \in \{0, \dots, 10\}$$

$X \sim Bi(10, \frac{1}{4})$ ... binomické rozdělení

$X = \sum_{i=1}^{10} Y_i$, přičemž Y_i je náhodná veličina udávající, zda na i-tou otázku odpověděl správně

– alternativní rozdělení $Y_i \sim Alt(\frac{1}{4})$

$Y_i \sim \mathrm{Alt}\left(\frac{1}{4}\right)$ tedy $P[Y_i = 1] = \frac{1}{4}$

$P[Y_i = 0] = \frac{3}{4}$

střední hodnota: $EX = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5$

„očekávaný" počet správně zodpovězených otázek při náhodném tipování

rozptyl: $\mathrm{var}X = n \cdot p \cdot (1-p) = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$

směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}X} \doteq 1{,}369$

„nejpravděpodobnější" hodnoty veličiny X

leží v intervalu $(2{,}5 - 1{,}369\,,\ 2{,}5 + 1{,}369)$

tedy hodnoty 2 a 3

příklad: Opilec má svazek 10 klíčů, pouze jeden je správný.
Náhodně zkusí otevřít dveře nějakým klíčem;
pokud neuspěje, svazek klíčů mu spadne na zem
a zapomene, který klíč zkoušel a zkusí to znovu.
Zaveďte náhodnou veličinu X udávající na
kolikátý pokus se mu podaří otevřít dveře.
Určete její rozdělení, střední hodnotu a rozptyl.

$$P[X=1] = \frac{1}{10}$$

$$P[X=2] = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}$$

$$P[X=3] = \left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}$$

$$\vdots$$

$$P[X=k] = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{10}\ ;\ k\in\mathbb{N}$$

$X \sim Geom\left(\frac{1}{10}\right)$ geometrické rozdělení s parametrem $p=\frac{1}{10}$

$EX = \frac{1}{p} = 10$ ... „očekávaný" počet pokusů

$$\operatorname{var} X = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{9}{10}\cdot\frac{100}{1} = 90$$

$\sigma = \sqrt{90} \doteq 9{,}48$ ⇒ „nejočekávanější" hodnoty budou ležet v intervalu $(10-9{,}48, 10+9{,}48)$

pravděpodobnost, že se mu někdy podaří otevřít je:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[X=k] = \frac{1}{10}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\dots\right)}_{\text{geometrická řada s kvocientem } \frac{9}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\frac{1}{10}} = \underline{\underline{1}}$$

příklad: Manažer během dne obvolává zákazníky společnosti a nabízí jim aktualizaci smlouvy.

Průměrně 7 zákazníků z 10 přistoupí na aktualizaci

Lze předpokládat, že se zákazníci chovají nezávisle.

Manažerův den končí ve chvíli, když uzavře smlouvu s: a) 1 zákazníkem

b) 5 zákazníky

Určete rozdělení náhodné veličiny popisující počet zákazníků, které musí manažer obvolat než získá daný počet zákazníků, kteří přistoupí na aktualizaci smlouvy.

a) $P[X=k] = 0{,}3^{k-1} \cdot 0{,}7$, $k \in \mathbb{N}$

$X \sim Geom(0{,}7)$ geometrické rozdělení

b) $P[X=5] = 0{,}7^5$

$P[X=6] = 5 \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3$

$P[X=7] = \binom{6}{2} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^2$

$P[X=8] = \binom{7}{3} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^3$

$\vdots$

$$P[X=k] = \binom{k-1}{k-5} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^{k-5}, \quad k \geq 5$$