

1. přednáška, 2.10.2023

motivací příklad: Dva hráči, A a B, hrají hru

o určitý obnos peněz, která má mít 5 kol.

Vítěz vyhrává celou sumu.

Hra se náhle přerušila po 3. kole ve stavu 2:1.

Jak si mají hráči spravedlivě rozdělit danou sumu?

Hra by se mohla odvíjet těmito způsoby:

A - A } možnosti vedoucí k výhře hráče A
A - B }
B - A }
B - B - výhra hráče B

$$P(\text{výhra hráče A}) = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{výhra hráče B}) = \frac{1}{4}$$

Spravedlivé rozdělení je tedy o poměru 3:1

tedy hráč A získá $\frac{3}{4}$ sumy a hráč B $\frac{1}{4}$.

připomenutí "klasické" definice pravděpodobnosti:

$$P(A) = \frac{\text{počet výsledků příznivých jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

přičemž všechny výsledky se navzájem vylučují
a jsou stejně pravděpodobné.

příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při narození 3 dětí

budou: a) všichni 3 kluci?

b) 2 kluci a 1 holka?

Předpokládejme, že pravděpodobnost narození chlapce i dívky je $\frac{1}{2}$.

Počet všech možností, jak se mohou narodit 3 děti, přičítáme-li k pořadí narození (K-kluk, H-holka):

K-K-K
K-K-H
K-H-K
K-H-H
H-K-K
H-K-H
H-H-K
H-H-H

$$a) P(3 \text{ kluci}) = \frac{1}{8}$$

$$b) P(2 \text{ kluci a } 1 \text{ holka}) = \frac{3}{8}$$

3. řádek Pascalova trojúhelníku: 1 3 3 1
udává počet kombinací pohlaví při narození 3 dětí

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
⋮

→
 $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$

pravděpodobnosti daných kombinací

Obecně: Pro událost, jejíž jednotlivé výsledky se vyskytují se stejnými pravděpodobnostmi poskytuje Pascalův trojúhelník pravděpodobnosti všech možných kombinací při N -násobném opakování - v N -tém řádku je počet různých způsobů jakými dané kombinace vznikají (*).

(*) vyčíslením tohoto N -lého řádku součtem čísel v tomto řádku získáme pravděpodobnosti daných kombinací.

příklad: Pokud máme 5 kulek, 3 bílé a 2 černé. Náhodně vybereme 3 kulek.

Jaká je pravděpodobnost, že 2 z nich budou bílé a 1 černá?

kombinatorické pravidlo součtu

$$\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{\frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!}}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$$

připomenutí základních pojmů:

Řekáme, že náhodná veličina X má diskrétní rozdělení, pokud existuje konečná nebo spočetná množina M

tak, že $\sum_{k \in M} P[X=k] = 1$.

Průměr (očekávanou) hodnotu spočítáme jako:

$$EX = \sum_{k \in M} k \cdot P[X=k]$$

Rozptyl: $\text{var} X = EX^2 - (EX)^2$

Iměrodatní odchylka: $\sigma = \sqrt{\text{var} X}$

příklad: 19 peněženec máme 4 bankovky: $2 \times 50 \text{ Kč}$
 $1 \times 100 \text{ Kč}$
 $1 \times 200 \text{ Kč}$

Zloděj nám náhodně vytáhne 2 bankovky.

Určete rozdělení náhodné veličiny X udávající naši ztrátu (resp. zisk zloděje) a spočítejte její střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

$$\begin{aligned}P[X=100] &= \frac{1}{6} \\P[X=150] &= \frac{1}{3} \\P[X=250] &= \frac{1}{3} \\P[X=300] &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\sum_{k \in M} P[X=k] = 1$$

$$\text{ kde } M = \{100, 150, 250, 300\}$$

střední hodnota: $EX = \sum_{k \in M} k \cdot P[X=k] =$

$$\begin{aligned}&= 100 \cdot \frac{1}{6} + 150 \cdot \frac{1}{3} + 250 \cdot \frac{1}{3} + 300 \cdot \frac{1}{6} \\&= 200 \text{ (Kč)}\end{aligned}$$

2. moment:

$$EX^2 = \sum_{k \in M} k^2 \cdot P[X=k]$$

$$\begin{aligned}&= 100^2 \cdot \frac{1}{6} + 150^2 \cdot \frac{1}{3} + 250^2 \cdot \frac{1}{3} + 300^2 \cdot \frac{1}{6} \\&= 45000\end{aligned}$$

rozptyl: $\text{var} X = EX^2 - (EX)^2 = 45000 - 200^2 = 5000$

směrodatná odchylka: $\sigma = \sqrt{5000} \doteq 70,71 \text{ (Kč)}$

\Rightarrow "nejpravděpodobnější hodnoty" budou ležet

" v intervalu $(200 - 70,71; 200 + 70,71)$

příklad (petrohradského paradox)

Házíme mincí dokud nepadne panna.

Pokud padne panna v 1. hodu ... vyhráváme 2 Kč
v 2. hodu ... vyhráváme 4 Kč
v 3. hodu ... vyhráváme 8 Kč

atd. ...

výhra se vždy zdvojnásobí

Zavedme náhodnou veličinu X udávající naši výhru.

$$P[X=2] = \frac{1}{2}$$

P

$$P[X=4] = \frac{1}{4}$$

OP

$$P[X=8] = \frac{1}{8}$$

OOP

$$P[X=16] = \frac{1}{16}$$

OOPP

⋮

Jaká je střední hodnota veličiny X ?

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{16} + \dots$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

v tomto případě nemá vyjádřující hodnotu