

Zápočtový test

Matematika pro geoinformatiky
2. termín 15. 1. 2024

1) Určete definiční obor a obor hodnot následujících funkcí.

$$f(x) = \log_3(2x - x^2)$$

$$g(x) = \arccos(2^x)$$

Dále rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou dané funkce prosté a pokud ano, určete předpis inverzní funkce. (4 body)

2) Zderivujte funkci a derivaci upravte (1 bod)

$$y = \sqrt[3]{\sin(3x)}$$

3) Určete rovnici tečny ke grafu funkce

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 3$$

v jejím průsečíku s osou y . Situaci zakreslete. (1 bod)

4) Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce

$$f(x) = e^{-3x}$$

v jejím průsečíku s osou x . Situaci zakreslete. (1 bod)

5) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{x^2}$$

Určete intervaly monotonie a konvexity, najděte lokální extrémy, inflexní body, průsečíky s osami a graf funkce zakreslete. (5 bodů)

6) Vypočtete integrál (1 bod)

$$\int_0^1 (5x + 3)(\sqrt{x} - 1)^2 dx$$

7) Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = 8x\sqrt{y}$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$. (1 bod)

8) Zakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem (1 bod)

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{1 - x^2 - y^2}}$$

9) Vypočítejte obě parciální derivace funkce (1 bod)

$$f(x, y) = y e^{2x-y}$$

10) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 - 3y)$$

v jejím průsečíku s osou z . (1 bod)

11) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice (2 body)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12) Určete argument komplexního čísla

$$z = (i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8)^3$$

Argument uvádějte v základním tvaru, tedy z intervalu $[0, 2\pi)$. (2 body)

13) Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí

- graf funkce $y = 3^x$ na graf funkce $y = (\frac{1}{3})^x$
- parabolu $y = x^2$ na parabolu $x = 1 - y^2$
- kružnici $x^2 + y^2 = 1$ na elipsu $x^2 + 9y^2 + 6x - 36y + 9 = 0$

Rozhodněte, zda je dané zobrazení shodnost či podobnost, potažmo přímá či nepřímá. (3 body)

14) Napište matici otočení kolem osy y o úhel $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček. Jaký je obraz bodu $[1, 2, 3]$? (1 bod)

Bonusový příklad (1 bod) Určete graficky počet řešení rovnice

$$\sin x - 3^x - 1 = 0$$