Domácí cvičení 4

Cyklometrické funkce

25. 10. 2023

1) Určete definiční obor daných funkcí a zjednodušte jejich předpis.

$$f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x)$$

$$g(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arccotg} x)$$

$$h(x) = \operatorname{tg}(\arcsin x)$$

$$u(x) = \sin\big(\frac{\pi}{2} + \arccos x\big)$$

$$v(x) = 3\cos\Big(\frac{5\pi}{2} + \arcsin\big(\frac{x}{3} - 1\big)\Big)$$

2) Dokažte, že funkce

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

je konstantní na intervalu $[-1, 1]$ a určete hodnotu této konstanty.

3) Dokažte rovnost funkcí

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

4) Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & x \in (-\infty, 0) \\ +\frac{\pi}{2} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

5) Vyjádřete pomocí arctg inverzní funkci k funkci $g(x) = 3\operatorname{tg} x$, pro $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

6) Vyjádřete pomocí arccotg inverzní funkci k funkci $h(x) = 2\operatorname{cotg} x$, pro $x \in (4\pi, 5\pi)$.

7) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\big(\frac{1}{x}\big)$$

Určete definiční obor, obor hodnot, průsečíky s osami, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, inflexní body, intervaly konvexity, zda je sudá či lichá, její asymptoty a načrtněte graf.

Výsledky:

1)

- $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $g(x) = -x$, $D_g = \mathbb{R}$
- $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $D_h = (-1, 1)$
- $u(x) = x$, $D_u = [-1, 1]$
- $v(x) = 3 - x$, $D_v = [0, 6]$

Nápověda k úlohám 2, 3, 4: Jaká je derivace konstantní funkce?

3) Rovnost lze ukázat i jinak - nakreslete si pravoúhlý trojúhelník, ve kterém platí $\arctan x = t$ a vyjádřete si v něm délky zbývajících stran a následně sinus úhlu t.

5) $g^{-1}(y) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}y\right)$

6) $h^{-1}(y) = 4\pi + \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{2}y\right)$

7)

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$;
- Nemá žádné průsečíky s osami.
- Nemá žádný extrém, je klesající na intervalu $(0, \infty)$ a na intervalu $(-\infty, 0)$.
- Nemá žádný inflexní bod, je konvexní na intervalu $(0, \infty)$, konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$.
- Vodorovná asymptota v $\pm\infty$ je přímka $y = 0$, svislou asymptotu nemá.
- $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0_-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$