Konvergence řad

Rozhodněte o konvergenci řad.

1)
$$\frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \cdots$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{n-4}}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+4}}{2^{4n+9}}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n-1}}{2^n + 3^{n+2}}$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + 3^{n-1}}{2^n + 3^{n+2}}\right)^n$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^{n+1}}{5^{n+2}} + \frac{100^n}{n!} \right)$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!} \right)$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$$

9)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

10)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(3^n)}{n^2}$$

11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \ln(n^6 + 2n^3)}{n}$$

12)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+6}{n+5}\right)$$

13)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$$

14)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$$

15)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

16)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[7]{n^8}}$$

17)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{n^7} + 1}$$

18)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^4}}{\sqrt[3]{n^5} + 1}$$

Výsledky:

1) Diverguje, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Je to oscilující řada, která nemá omezenou posloupnost částečných součtů.

2) Diverguje, geometrická řada s kvocientem $\frac{4}{3} > 1$

3) Konverguje, geometrická řada s kvocientem $\frac{9}{16} < 1$

4) Diverguje, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{27} \neq 0$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence řady (obecný člen řady nemá limitu 0).

5) Konverguje, z odmocninového kritéria: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{27} \in [0,1)$

6) Konverguje, neboť je součtem dvou absolutně konvergentních řad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^{n+2}}$ je geometrická řada s kvocientem $\frac{4}{5} < 1$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ konverguje podle podílového kritéria, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$

7) Řada diverguje, neboť je součtem divergentní a konvergentní řady.

8) Diverguje, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2} \neq 0$

9) Konverguje, podle integrálního kritéria lze vyšetřovat konvergenci integrálu $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$, který dovedeme spočítat - zaveďte substituci $t = \ln x$. Dostaneme $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \frac{1}{\ln 2} < \infty$

10) Konverguje, ze srovnávacího kritéria lze odhadnout:

$$\frac{\sin(3^n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní majorantou.

11) Diverguje, ze srovnávacího kritéria lze odhadnout:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{n} \leq \frac{1 + \ln(n^6 + 2n^3)}{n},$$

tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní minorantou.

12) Diverguje, z limitního srovnávacího kritéria. Využijme známé limity $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\ln z}{z-1} = 1$ a řadu srovnejme s řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+6}{n+5} - 1)$, o které ukážeme, že diverguje (např. srovnáme ji s harmonickou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

13) Konverguje, z limitního srovnávacího kritéria. Jako v předchozím příkladě, využijme známé limity a řadu srovnejme s řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2+2}{n^2+1}-1)$, o které ukážeme, že konverguje (např. srovnáme ji s řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$)

14) Konverguje, z limitního srovnávacího kritéria. Využijme známé limity $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z^2}=\dfrac{1}{2}$ a řadu srovnejme s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}(\frac{4}{3}>1)$.

15) Diverguje, ze srovnávacího kritéria lze odhadnout:

$$\forall n\geq 3:\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\frac{\ln n}{\sqrt{n}},$$

tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ je divergentní minorantou.

16) Konverguje, z limitního srovnávacího kritéria. Srovnáme-li řadu s konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, tak, aby $1<\alpha<\frac{8}{7}$, dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$. Lze volit $\alpha=\frac{15}{14}$.

17) Konverguje. Lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, tak, že $\alpha=\frac{7}{4}-\frac{2}{3}=\frac{13}{12}$, tedy s konvergentní řadou. Dostaneme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$.

18) Diverguje. Lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, tak, že $\alpha=\frac{5}{3}-\frac{4}{5}=\frac{13}{15}$, tedy s divergentní řadou. Dostaneme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$.