Příklad 10.3. Per partes: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x\cos x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int (x^2+1)\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x^2\sin x \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int x\ln x \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int x^3\ln x \,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos x \,\mathrm{d}x$

Řešení 10.3.

a) $x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$

b) $x\sin x + \cos x + C$

c) $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}(2x^2-2x+3)+C$

d) $(2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$

e) $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$

f) $x\ln x - x + C$

g) $\dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{x^4}{16} + C$

h) $-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + C$

i) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$

j) $\dfrac{\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)}{2} + C$

Příklad 10.4. Substituce: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\displaystyle\int \sin 3x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{5x} \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{5+\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x$

o) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

Řešení 10.4.

a) $-\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$

b) $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x} + C$

c) $2\sin\sqrt{x} + C$

d) $\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{x} + C$

e) $-\dfrac{1}{1+\sin x} + C$

f) $\frac{2}{3}\sqrt{1+x}\,(x-2) + C$

g) $\dfrac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$

h) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$

i) $-\ln|\cos x| + C$

j) $5\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

k) $\cos\frac{1}{x} + C$

l) $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$

m) $-\frac{1}{2}\arccos^2 x + C$

n) $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C$

o) $-\sqrt{1-x^2} + C$

p) $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

Příklad 10.5. Kombinace substituce a per partes: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(\mathrm{e}^{x})^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.5.

a) $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$

b) $2(\cos\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\sqrt{x}) + C$

c) $-\frac{1}{4}(1+2x)\mathrm{e}^{-2x} + C$

d) $-x\operatorname{cotg} x + \ln\sin x + C$

e) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$

f) $\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x + C$

Příklad 10.6. Těžší příklady:

a) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(2x+3)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \arccos(x-4)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \ln(7x-5)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.6.

a) $-\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+6x+5\right) + x\operatorname{arctg}(2x+3) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) + C$

b) $-\sqrt{-x^2+8x-15} - 4\arcsin(4-x) + x\arccos(x-4) + C$

c) $\left(x-\frac{5}{7}\right)\ln(7x-5) - x + C$

d) $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + C$

• • •

10.3 Racionální lomené funkce

Teorie: [1] str. 156 – 163, příklady: [3] str. 94 – 99.

- *Definujte racionální lomenou funkci, připomeňte dělení polynomu a rozklad na parciální zlomky.*
- *Procvičujte příklady, které vedou přes substituci na primitivní funkci* $\operatorname{arctg} t$, *a integraci pomocí parciálních zlomů.*

• • •

Příklad 10.7. Substituce za jmenovatel a substituce vedoucí na $\operatorname{arctg} t$**:** Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2-4}{x^3-4x+9}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{3}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.7.

a) $\ln\left|x^3-4x+9\right|+C$

b) $\dfrac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+C$

c) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}x+C$

e) $5\operatorname{arctg}(x+1)+C$

f) $\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$

Příklad 10.8. Převod na ryze lomenou funkci a parciální zlomky: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{14+x}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{3x+8}{2x^2-x-3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{5x+6}{x^2-6x+8}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{8x-x^2-12}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{1+2x-x^2}{x^2(2x+1)}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3+2x^2+2x+1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{3x^2+6x+6}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.8.

a) $\dfrac{1}{4}\ln\frac{|x-2|}{|x+2|}+C$

b) $-2\ln|x+2|+3\ln|x-4|+C$

c) $\dfrac{5}{2}\ln|2x-3|-\ln|x+1|+C$

d) $13\ln|4-x|-8\ln|2-x|+C$

e) $2\ln|x-2|-5\ln|x-6|+C$

f) $-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

g) $\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+C$

h) $x+2\ln x-\ln|x+2|+C$

i) $-x-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+2\ln|x-1|-\ln|x|+C$

j) $3\left(6\ln|x-2|+x-\frac{10}{x-2}\right)+C$

• • •

10.4 Určitý a nevlastní integrál

Teorie: [1] str. 167 – 174, příklady: [3] str. 101 – 108.

- *Definujte určitý a nevlastní integrál včetně předpokladů, pojem konvergence a divergence integrálu, geometrický význam.*
- *Připomeňte varianty per partes a substituce pro určitý (nikoli nevlastní) integrál.*

• • •

Příklad 10.9.

a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1\left(x\,\mathrm{e}^{x\operatorname{arctg}x}+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^1\frac{-1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.9.

a) $\frac{1}{4}$

b) 0

c) 4

d) $2\ln 2 - \frac{3}{4}$

e) $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}$ (1. člen je lichá funkce)

f) $-\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

g) $\frac{3}{2}$

h) $\frac{\ln 3 - \ln 2}{2}$

Příklad 10.10. Konvergentní nevlastní integrál: Rozhodněte, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.10.

a) konverguje, 1

b) konverguje, 2

c) konverguje, 1

d) konverguje, 1

Příklad 10.11. Konvergentní nevlastní integrál: Rozhodněte, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+10x+25}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+7x+10}\,\mathrm{d}x$

Pozor, v těchto příkladech nelze použít, že integrál součtu je roven součtu integrálů, protože to platí pouze, pokud tyto integrály konvergují. Musíme počítat limitu součtu primitivních funkcí, ne součet limit primitivních funkcí. Jinak bychom dostali neurčitý výraz nekonečno méně nekonečno.

Řešení 10.11.

a) $\frac{1}{5}$

b) $\ln\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$

Příklad 10.12. Divergentní nevlastní integrál: Rozhodněte, zda zadaný integrál konverguje nebo diverguje.

a) $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_0^\infty x^2 \,\mathrm{d}x$

c) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

d) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

e) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

f) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení 10.12.
a) - f) diverguje

Pozor, nevlastní integrál f) nekonverguje, přestože jde o integrál liché funkce přes souměrný integrační interval, tedy bychom čekali, že se bude rovnat nule.

• • •

10.5 Numerická integrace

Teorie: [1] str. 174 – 177, příklady: [3] str. 113 – 114.
Připomeňte lichoběžníkovou metodu včetně předpokladů, ideálně pomocí obrázku.

• • •

Příklady

Příklad 10.13. Zadaný integrál odhadněte pomocí lichoběžníkové metody s délkou kroku h.

a) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x, \quad h = \frac{\pi}{4}$

b) $\int_{-1}^{1} x^2 + 2x \,\mathrm{d}x, \quad h = 1/2$

Řešení 10.13.

a) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x \doteq \frac{3+2\sqrt{2}}{12}$

b) $\int_{-1}^{1} x^2 + 2x \,\mathrm{d}x \doteq \frac{3}{4}$

Příklad 10.14. Mějme integrál $\int_1^3 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$. Odhadněte jeho hodnotu pomocí lichoběžníkové metody s délkou kroku $h = 1,\ h = 1/4$ a porovnejte s přesnou hodnotou.

Řešení 10.14. po zaokrouhlení $1{,}166, \quad 1{,}103, \quad 1{,}099$

• • •

10.6 Různé příklady

Po dokončení všech metod výpočtu integrálu věnujte čas procvičování, počítání příkladů bez zadané metody.

• • •

Příklady

Příklad 10.15. Neurčitý integrál: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int (2x-1)^4\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+3\,x+2}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2+4}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int (x^2-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

o) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1-x}\,\mathrm{d}x$

q) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

r) $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

s) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$

t) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

u) $\displaystyle\int \arccos x\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.15.

a) $x - \operatorname{arctg} x + C$

b) $\dfrac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C$

c) $\operatorname{tg} x - x + C$

d) $\dfrac{(2x-1)^5}{10} + C$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

f) $\dfrac{x^2}{2} - 3x + \ln \dfrac{(x+2)^8}{|x+1|} + C$

g) $-2\cos x + C$

h) $\dfrac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3}{2}x + C$

i) $\dfrac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$

j) $(x-1)^2\,\mathrm{e}^x + C$

k) $\mathrm{e}^x - \ln|\,\mathrm{e}^x + 1| + C$

l) $\sin x - \cos x + C$

m) substituce $t = \sqrt{x}$, $-\dfrac{4}{3}\sqrt{(1-\sqrt{x})^3} + C$

n) substituce $t = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$, $\ln(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + C$

o) $\ln|1 - \cos x| + C$

p) substituce $t = \sqrt{x}$, $-2\sqrt{x} + \ln \dfrac{\sqrt{x}+1}{|\sqrt{x}-1|} + C$

q) $\ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \dfrac{1}{(x+1)} + \operatorname{arctg} x + C$

r) $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

s) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \dfrac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} + C$

t) $\ln|\sin x| + C$

u) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

Příklad 10.16. Těžší příklady:

a) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení 10.16.

a) substituce $t = \sqrt{x-1}$, $2\sqrt{x-1} + \ln x - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C$

b) substituce $t = \operatorname{tg} x$, $x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$

Příklad 10.17. Určitý a nevlastní integrál: Vypočítejte zadaný integrál.

a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{18x^2-2}{3x-1}\;\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\;\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^0 2x\sqrt{x^2+1}\;\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln^4 x}{x}\;\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{2x}\;\mathrm{d}x$

Řešení 10.17.

a) $28 \quad (3x^2 + 2x)$

b) $\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}} \quad \left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$

c) $\frac{2}{3}\left(1 - 2\sqrt{2}\right) \quad \left(\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)$

d) $\frac{31}{5} \quad \left(\frac{1}{5}\ln^5 x\right)$

e) diverguje $\quad (\infty)$

f) konverguje $\quad (-0.25)$

• • •