Elementární funkce

Funkce složené

Určete definiční obor a obor hodnot dané funkce. Rozhodněte, zda je funkce prostá a pokud ano, určete předpis funkce inverzní.

1) $f(x) = 2^{\frac{3x+1}{x-4}}$

2) $f(x) = \log_3 (3 - \frac{6}{x})$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 13}$

4) $f(x) = \log_2 (8x - x^2)$

5) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-x^2 + 4x + 5)$

6) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

7) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$

8) $f(x) = \arccos (\log_2 x)$

9) $f(x) = \operatorname{arctg} (\frac{x}{x+2})$

10) $f(x) = \operatorname{arctg} (x^2 + 4x + 5)$

11) $f(x) = \operatorname{arccotg} (\log_3 (\sin x))$

12) $f(x) = 6 \arcsin (2x + 1) + 6\pi$

13) $f(x) = \arcsin (\frac{x^2}{4})$

14) $f(x) = \arcsin (x^3)$

Výsledky:

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $H_f = (0, \infty) \setminus \{8\}$, funkce je prostá, neboť je složením dvou prostých funkcí, tj. $f = f_2 \circ f_1$, přičemž $f_1(x) = \frac{3x+1}{x-4}$ a $f_2(x) = 2^x$. Inverze: $f^{-1}(x) = \frac{4 \log_2 x + 1}{\log_2 x - 3}$

2) $D_f = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, funkce je prostá, neboť je složením dvou prostých funkcí, tj. $f = f_2 \circ f_1$, kde $f_1(x) = 3 - \frac{6}{x}$ a $f_2(x) = \log_3 x$. Inverze: $f^{-1}(x) = \frac{6}{3 - 3^x}$

3) $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = [3, \infty)$, funkce není prostá, neboť např. $f(-3) = f(-1)$

4) $D_f = (0, 8)$, $H_f = (-\infty, 4]$, funkce není prostá, neboť např. $f(1) = f(7)$

5) $D_f = (-1, 5)$, $H_f = [-2, \infty]$, funkce není prostá, neboť např. $f(0) = f(4)$

6) $D_f = [0, 4]$, $H_f = [0, 2]$, funkce není prostá, neboť např. $f(0) = f(4)$

7) $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $H_f = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, funkce je složením dvou prostých funkcí, tedy je prostá. Inverze: $f^{-1}(x) = \frac{1}{\cos x}, x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

8) $D_f = [\frac{1}{2}, 2]$, $H_f = [0, \pi]$, funkce je složením dvou prostých funkcí, tedy je prostá. Inverze: $f^{-1}(x) = 2^{\cos x}, x \in [0, \pi]$

9) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $H_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$,, funkce je složením dvou prostých funkcí, tedy je prostá. Inverze: $f^{-1}(x) = \frac{2}{1 - \operatorname{tg} x} - 2, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$

10) $D_f = \mathbb{R}$, $H_f = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, funkce není prostá, neboť např. $f(-4) = f(0)$

11) $D_f = (2k\pi, 2k\pi + \pi), k \in \mathbb{Z}$, $H_f = [\frac{\pi}{2}, \pi)$, funkce není prostá, neboť vnitřní funkce není prostá, např. $f(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{3\pi}{4})$. Inverzi tedy nemá. *Poznámka:* Na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}]$ prostá je a inverze má $f^{-1}(x) = \arcsin(3^{\operatorname{cotg} x}), x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

12) $D_f = [-1, 0]$, $H_f = [3\pi, 9\pi]$, funkce je složením dvou prostých funkcí, tedy je prostá. Inverze: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{6}x - \pi) - \frac{1}{2}, x \in [3\pi, 9\pi]$

13) $D_f = [-2, 2]$, $H_f = [0, \frac{\pi}{2}]$, funkce není prostá, neboť např. $f(1) = f(-1)$.

14) $D_f = [-1, 1]$, $H_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, funkce je složením dvou prostých funkcí, tedy je prostá. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\sin x}, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$