

Příklad 4.11. Funkce definované po částech: Načrtněte graf funkce f . Z grafu určete obor hodnot $\mathcal{H}(f)$, zda je funkce omezená, prostá a zda je na svém $\mathcal{D}(f)$ monotonní.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \log 100, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x \in (-3, 0) \\ \log_2(x+1), & x \in \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1) \\ x^3, & x \in (-1, 1) \\ e^{-x+1}, & x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-2, 1) \\ |2-x|, & x \in (1, 4) \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} + 1, & x > 0 \end{cases}$$

(Nejde o složené funkce!)

Řešení 4.11.

$$\text{a) } \mathcal{H}(f) = (0, 1) \cup \{2\}, \text{ omez., neklesající}$$

$$\text{d) } \mathcal{H}(f) = (0, \infty), \text{ prostá na } \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \text{ (přesto, že klesající na } (-\infty, 0), \text{ rostoucí na } (0, \infty))$$

$$\text{b) } \mathcal{H}(f) = (-9, 2), \text{ omez., rostoucí, prostá}$$

$$\text{e) } \mathcal{H}(f) = (-1, 1), \text{ omez.}$$

$$\text{c) } \mathcal{H}(f) = \langle 0, 4 \rangle, \text{ omez.}$$

$$\text{f) } \mathcal{H}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

Příklad 4.13. Určete $\mathcal{D}(f)$ a rozhodněte, zda je funkce prostá.

$$\text{a) } f(x) = 3^{\frac{x+1}{x+3}}$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\text{tg}(x - \frac{\pi}{2})}{4} + 1$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} |x-3|, & x \in (-2, 4) \\ 5-x, & x \in \langle 4, 8 \rangle \end{cases}$$

Řešení 4.13.

$$\text{a) } \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \text{ prostá}$$

$$\text{d) } \mathcal{D}(f) = \langle 1, \infty \rangle, \text{ prostá}$$

$$\text{b) } \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \text{ není prostá } \Leftarrow \text{ je periodická}$$

$$\text{e) } \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ POZOR definovaná po částech, prostá } \Leftarrow \text{ z grafu}$$

$$\text{c) } \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \text{ není prostá } \Leftarrow \text{ je sudá}$$

$$\text{f) } \mathcal{D}(f) = (-2, 8), \text{ definovaná po částech, není prostá } \Leftarrow \text{ z grafu}$$