1. zápočtový test *Varianta A* *Matematika, LS 2023/24*

JMÉNO		*Počet bodů*	/ 30

1. Zapište a zakreslete v $\mathbb{R}^2$ definiční obor funkce

$$f(x,y) = \log(1-y^2) + \sqrt{x-y^2} + \sqrt{3-x}$$

Body: /5

2. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \ln(xy+x) - \frac{x^2}{2} - y$$

Body: /6

3. Zakreslete a popište vrstevnici ke grafu funkce

$$f(x,y) = \frac{2x-y}{x-1-y}$$

v řezu rovinou $z = 3$.

Body: /5

4. Je dána funkce

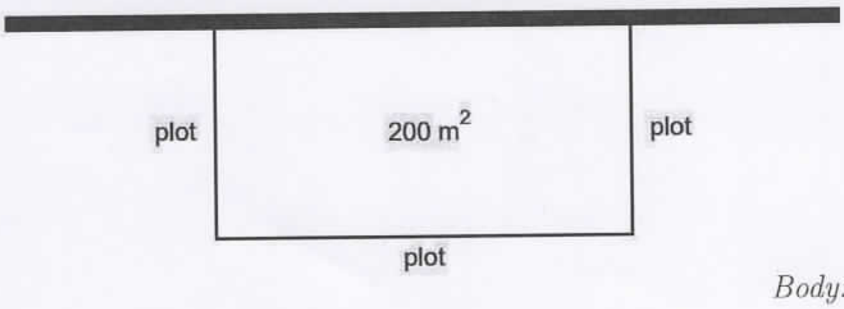
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^3}$$

- Určete gradient v bodě $A = [3; -1]$.
- Napište rovnice tečné roviny v tomto bodě.
- Pomocí tečné roviny aproximujte hodnotu

$$\sqrt[3]{3,01^2 + (-0,98)^3}$$

Body: /7

5. Chceme navrhnout obdélníkovou parcelu o rozloze 200 m^2, jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Jaké rozměry by měla obdélníková parcela mít, aby měl plot měl minimální délku?



Body: /7

1. $f(x,y) = \log(1-y^2) + \sqrt{x-y^2} + \sqrt{3-x}$

I. $1-y^2 > 0$ $\wedge$ II. $x - y^2 \geq 0$ $\wedge$ III. $3 - x \geq 0$

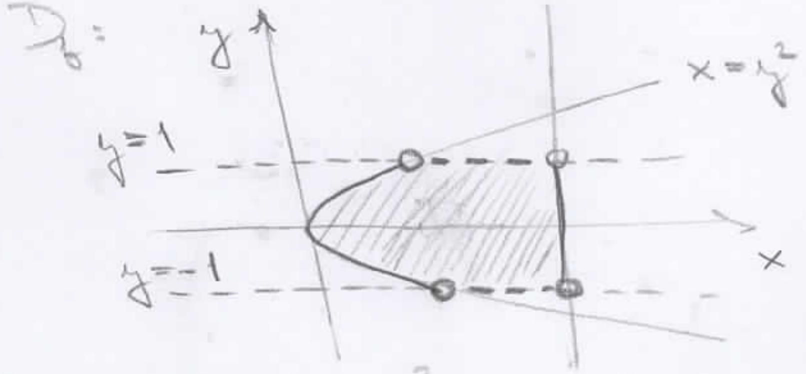
$(1-y)(1+y) > 0$ $\qquad x \geq y^2 \qquad x \leq 3$

$-\quad + \quad -$

$-1 \qquad 1$

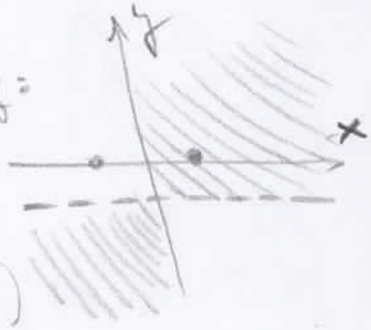
$y \in (-1,1)$

D_f:



$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y \leq 1 \wedge y^2 \leq x \leq 3\}$

2. $f(x,y) = \ln(xy + x) - \frac{x^2}{2} - y$ $\quad D_f$:



$xy + x > 0$

$x(y+1) > 0 \iff ((x>0) \wedge (y+1>0))$

$\vee((x<0) \wedge (y+1<0))$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y+1}{xy+x} - x = 0 \quad | \cdot (xy+x)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{xy+x} - 1 = 0 \quad | \cdot (xy+x)$

$y + 1 - x^2 y - x^2 = 0$

$\cancel{x} - xy - \cancel{x} = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$

$y = -1 \qquad x = \pm 1$

stacionární bod: $[1,0]$

$[0,-1] \notin D_f$

$[-1,0] \notin D_f$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} - x\right) = -\frac{1}{x^2} - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y+1} - 1\right) = -\frac{1}{(y+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(y+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det H(1,0) = 2 > 0$

$\wedge \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) < 0$

$\Rightarrow$ negativně definitní matice

$\Rightarrow$ $[1,0]$ je lok. maximum

3. $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{x-1-y} = 3 \quad |\cdot(x-1-y)$

$$2x - y = 3x - 3 - 3y \quad \begin{array}{l} |+3y \\ |-2x \end{array}$$

$$2y = x - 3$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$$

vrstevnice je přímka kromě bodu $[-1,-2]$

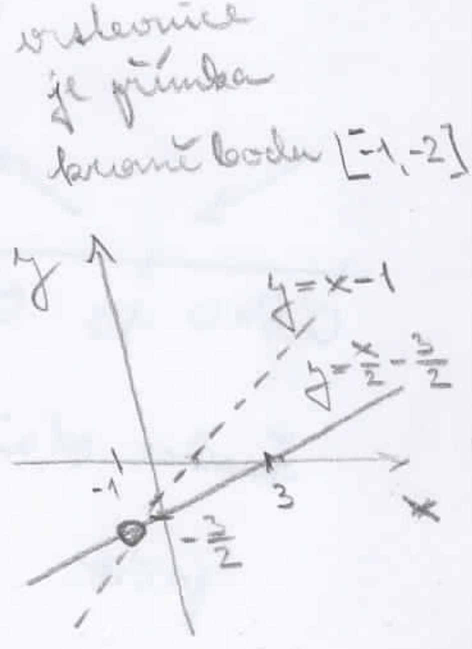
D_f: $x - 1 - y \neq 0$

$y \neq x - 1$

$x - 1 \neq \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}x \neq -\frac{1}{2}$

$x \neq -1$



4. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2+y^3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cdot\frac{1}{3}(x^2+y^3)^{-\frac{2}{3}}\Big|_{[3,-1]} = 2\cdot 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2\cdot\frac{1}{3}(x^2+y^3)^{-\frac{2}{3}}\Big|_{[3,-1]} = 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\nabla f(3,-1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$z_0 = f(3,-1) = \sqrt[3]{3^2+(-1)^3} = 2$$

tečná rovina: $z-2 = \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}\cdot(y+1)$

$$\sqrt[3]{3{,}01^2+(-0{,}98)^3} \doteq 2 + \frac{1}{2}\cdot(3{,}01-3) + \frac{1}{4}\cdot(-0{,}98+1)$$
$$= 2 + 0{,}005 + 0{,}005 = \underline{\underline{2{,}01}}$$

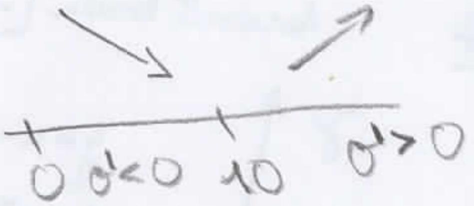
5.

$S = a\cdot b = 200 \Rightarrow \boxed{b=\frac{200}{a}}$

$o(a,b) = 2a + b$

$o\left(a,\frac{200}{a}\right) = 2a + \frac{200}{a}$

$o' = 2 - \frac{200}{a^2} = 0 \iff a^2 = 100$
$a = \pm 10$



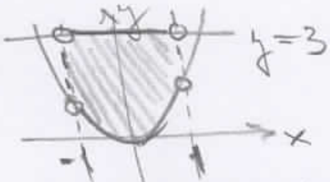
Funkce $o(a)$ má minimum v bodě 10,

proto $a = 10$ m, $b = 20$ m

1. zápočtový test *Varianta B* *Matematika, LS 2023/24*

JMÉNO		*Počet bodů*	/ 30

1. Zapište a zakreslete v $\mathbb{R}^2$ definiční obor funkce

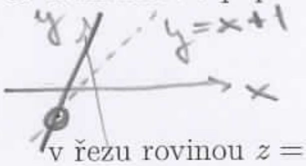


$$f(x,y) = \log\left(1-x^2\right) + \sqrt{y-x^2} + \sqrt{3-y}$$ *Body:* /5

2. Určete lokální extrémy funkce

[0,1] lok. maximum $$f(x,y) = \ln\left(xy+y\right) - \frac{y^2}{2} - x$$ *Body:* /6

3. Zakreslete a popište vrstevnici ke grafu funkce



$$f(x,y) = \frac{2y-x}{y-1-x}$$ *Body:* /5

v řezu rovinou $z = 3$. $y = 2x+3$ $\setminus \{[-2,-1]\}$

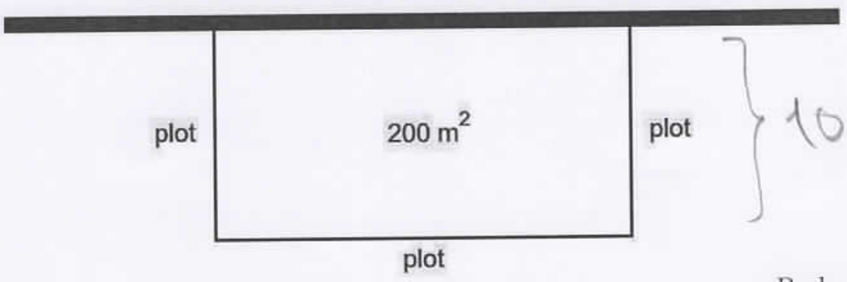
4. Je dána funkce

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^2}$$

- Určete gradient v bodě $A = [-1; 3]$. $\nabla f(A) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
- Napište rovnice tečné roviny v tomto bodě. $z-2 = \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{2}(y-3)$
- Pomocí tečné roviny aproximujte hodnotu

$$\sqrt[3]{(-0,98)^3 + 3,01^2} \doteq 2,01$$ *Body:* /7

5. Chceme navrhnout obdélníkovou parcelu o rozloze 200 m^2, jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Jaké rozměry by měla obdélníková parcela mít, aby měl plot měl minimální délku?



10 m

20 m

Body: /7